Corrigé du DM n°2

1. (a) On calcule les différences :

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k^2}=\frac{k(k+1)-k^2-(k+1)}{k^2(k+1)}=\frac{-1}{k^2(k+1)}<0 \text{ pour } k>0,$$

et

$$\frac{1}{k^2}-\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{k-1-k^2+k(k-1)}{k^2(k-1)}=\frac{-1}{k^2(k-1)}<0 \text{ pour } k>1$$

Donc pour $k\geq 2$:

$$\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\leq\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}.$$

(b) On reconnait une somme télescopique

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k} &= \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \text{ avec le changement d'indice } i=k-1\\ &= \sum_{i=2}^{n-1}\frac{1}{i}+\frac{1}{1}-\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k}-\frac{1}{n}=1-\frac{1}{n}\leq 1 \text{ car } n\geq 1.\end{aligned}$$

2. (a) En sommant les inégalités $\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$, on obtient :

$$S_n=\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}\leq\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\leq 1$$

(b) On a pour tout $n\geq 1$:

$$S_{n+1}-S_n=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{(n+1)^2}\geq 0$$

donc $S_{n+1}\geq S_n$.

(c) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante et majorée (par 1), donc d'après le théorème de la limite monotone, elle admet une limite finie (que l'on notera L).

3. (a) Il faut reconnaître pour la suite que

$$S_n-S_m=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

En sommant les inégalités, $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\leq\frac{1}{k^2}\leq\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}$, on obtient comme $n\geq m\geq 1$:

$$\frac{1}{m+1}-\frac{1}{n+1}=\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\leq\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k^2}\leq\sum_{k=m+1}^{n}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}=\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\leq\frac{1}{m}$$

(b) En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient

$$\frac{1}{m+1}\leq R_m\leq\frac{1}{m}$$

4. Comme on a

$$L-S_n\leq 10^{-2}\quad\Leftrightarrow\quad R_m\leq 10^{-2}.$$

Donc pour $m=100$, S_{100} donnera donc une valeur approchée à 10^{-2} près de L.

Exercice facultatif.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0\in\mathbb{R}$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1}=\exp(u_n)-1.$$

On pose la fonction f définie par

$$f(x)=e^x-1.$$

1. On étudie les variations de la différence : soit $x\in\mathbb{R}$, on définit

$$g(x)=f(x)-x=e^x-1-x.$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=e^x-1$.

x		0	
$e^x - 1$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$		$\nearrow$
	$+$	0	$+$

Donc l'équation $f(x) = x$ a une unique solution qui est 0 et $f(x) - x > 0$ sur $\mathbb{R}^*$.

2. On suppose que $u_0 = 1$.
   (a) On montre par récurrence que pour tout entier n, $1 \leq u_n \leq u_{n+1}$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : "$1 \leq u_n \leq u_{n+1}$.".
   Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = e - 1 > 1$ car $e > 2$. Donc $1 \leq u_0 \leq u_{0+1}$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   Or f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et 1, u_n et u_{n+1} en sont éléments alors
   $$f(1) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1})$$
   et comme $f(1) = e - 1 > 1$ alors $1 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2}$ et donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier } n,\ 1 \leq u_n \leq u_{n+1}.}$

   (b) Pour montrer que (u_n) n'est pas majorée on raisonne par l'absurde :
   Si (u_n) est majorée, alors comme elle est croissante, elle est convergente d'après le théorème de la limite monotone. Soit ℓ sa limite. Comme f est continue sur $\mathbb{R}$ elle est continue en ℓ et
   $$f(\ell) = \ell.$$
   D'après la question1, la seule solution étant $\ell = 0$. Mais comme pour tout entier n : $1 \leq u_n$ alors par passage à la limite, $1 \leq \ell = 0$. Ce qui est absurde. Donc (u_n) n'est pas majorée et comme elle est croissante, elle tend vers $+\infty$.

   (c) On étudie les variations de la différence : soit $x \in \mathbb{R}$, on définit
   $$g(x) = f(x) - (e-1) \cdot x = e^x - 1 - (e-1) \cdot x.$$
   g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = e^x - e + 1$.

x	1		$+\infty$
$e^x - e + 1$	1	$+$	
g	0	$\nearrow$	

   Donc si $x \geq 1$ alors $f(x) \geq (e-1)x$.

   (d) On montre alors par récurrence que pour tout entier n, $u_n \geq (e-1)^n$.
   Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : "$u_n \geq (e-1)^n$".
   Initialisation : $u_0 = 1$ et $(e-1)^0 = 1$ donc $u_0 \geq (e-1)^0$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   Or f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et u_n et $(e-1)^n$ en sont éléments donc
   $$f(u_n) \geq f\left((e-1)^n\right)$$
   et comme $(e-1)^n \geq 1$ alors $f\left((e-1)^n\right) \geq (e-1)(e-1)^n$ donc
   $$u_{n+1} \geq (e-1)^{n+1}.$$
   Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout entier } n,\ u_n \geq (e-1)^n.}$
   Et comme $e - 1 > 1$ alors $(e-1)^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et par comparaison $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

3. On suppose ici que $u_0 < 0$.
   (a) On montre par récurrence que pour tout entier n, $u_n < 0$
   Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}_n$ la proposition : "$u_n < 0$".
   Initialisation : $u_0 < 0$ par définition. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
   Hérédité : On suppose $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   Or f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et u_n et 0 en sont éléments. Donc
   $$u_{n+1} = f(u_n) < f(0) = 0.$$
   Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
   Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout entier } n,\ u_n < 0}$

   (b) Pour tout $x < 0$, on a $f(x) > x$ donc comme $u_n < 0$ alors $u_{n+1} = f(u_n) > u_n$.
   Donc (u_n) est croissante et comme elle est majorée par 0 alors elle est convergente. Soit ℓ sa limite. f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue en ℓ et $f(\ell) = \ell$. La seule solution est $\ell = 0$.
   Donc (u_n) converge vers 0.