# Corrigé du DM n°3

1. (a) $Q(1) = 0$ et $Q'(1) = 10$. Ainsi 1 est une racine d'ordre 1de $Q$.

   (b) $(X-1)$ divise $P$. La division euclidienne de $Q$ par $(X-1)$ nous donne
   $$Q(X) = (X+1)\left(3X^2+5X+2\right).$$
   Le trinôme $3X^2+5X+2$ possède deux racines : 1 et $-\frac{2}{3}$. On obtient ainsi la factorisation
   $$3X^2+5X+2 = 3(X-1)\left(X+\frac{2}{3}\right),$$
   d'où
   $$Q(X) = (X-1)(3X+2)(X+1).$$

2. (a) $P(-1) = P'(-1) = 0, P''(-1) = 12 \neq 0$ donc $-1$ est une racine de multiplicité 2.

   (b) D'après le corollaire 3.5 sur l'ordre de multiplicité des racines, $(X+1)^2$ divise $P$ et il existe un polynôme $S$ tel que
   $$P(X) = (X+1)^2 S(X) \text{ et } S(-1) \neq 0.$$

   (c) On a $deg(S) = deg(P) - deg\left((X+1)^2\right) = 4-2 = 2$.

   (d) La division euclidienne de $P(X)$ par $(X+1)^2$ nous donne
   $$P(X) = (3X^2-13X-10)(X+1)^2$$
   Le trinôme $3X^2-13X-10$ possède deux racines : 5 et $-\frac{2}{3}$ d'où
   $$3X^2-13X-10 = 3(X-5)\left(X+\frac{2}{3}\right).$$
   On en déduit que $P(X) = (3X+2)(X-5)(X+1)^2$.

3. (a) Les questions précédentes montrent que
   $$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\left\{-1;-\frac{2}{3};1\right\}$$

   (b) On a donc
   $$f(x) = \frac{(x-5)(x+1)}{(x-1)}.$$

   (c) On pose le tableau de signe de $f$.

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $-\frac{2}{3}$ | | $1$ | | $5$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-5$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | $\|$ | $+$ | $\|$ | $+$ | $\|$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

   Ce qui montre que l'ensemble des solutions de l'inéquation est $\left]-1,-\frac{2}{3}\right[\cup\left]-\frac{2}{3},1\right[\cup[5,+\infty[$.

   (d) Pour $x \in \mathcal{D}_f$, alors
   $$x+a+\frac{b}{x-1} = \frac{x^2+x(a-1)+b-a}{x-1} = \frac{x^2-4x-5}{x-1} = f(x).$$
   On obtient ainsi le système
   $$\begin{cases} a-1=-4 \\ b-a=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=-8 \end{cases}$$
   d'où $f(x) = x-3-\frac{8}{x-1}$.

   (e) La fonction $f$ est croissante sur $[5,+\infty[$ en tant que somme de fonctions croissantes.

## Exercice facultatif.

**Partie 1. Un jeu en ligne.**

La société Lehazard met à la disposition de ses clients un nouveau jeu en ligne dont la page d'écran affiche une grille à trois lignes et trois colonnes.

Après une mise initiale de 2 euros du joueur, une fonction aléatoire place au hasard successivement trois jetons (★) dans trois cases différentes. La partie est gagnée si les trois jetons sont alignés. Le gagnant empoche 10 fois sa mise, ce qui lui rapporte 18 euros à l'issue du jeu. Dans le cas contraire la mise initiale est perdue par le joueur.

| | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| 1 | ★ | | |
| 2 | ★ | | |
| 3 | | ★ | |

On définit les événements $H$, $V$, $D$, $N$ par :
— $H$ : « les trois jetons sont alignés horizontalement ».
— $V$ : « les trois jetons sont alignés verticalement ».
— $D$ : « les trois jetons sont alignés en diagonale ».
— $N$ : « les trois jetons ne sont pas alignés ».

1. Les positionnements sont déterminés par l'ensemble (sans ordre) des 3 positions distinctes parmi 9.

   *Conclusion :* $\boxed{\text{Il y a donc } \binom{9}{3} = \frac{9\cdot 8\cdot 7}{3\cdot 2\cdot 1} = 3\cdot 4\cdot 7 = 84 \text{ positionnements possibles.}}$

2. $(H)$ est formé de 3 positionnements : ligne 1, 2 ou 3, les positionnements étant équiprobables donc $\mathbb{P}(H) = \frac{3}{84}$

   $(V)$ est formé de 3 positionnements : colonne $A$, $B$ ou $C$, donc $\mathbb{P}(V) = \frac{3}{84}$

   $(D)$ comporte 2 diagonales : donc $\mathbb{P}(D) = \frac{2}{84}$

3. $(H, V, D, N)$ étant un système complet d'événements,

$$\mathbb{P}(N) = 1 - \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H) - \mathbb{P}(D) = 1 - \frac{8}{84} = 1 - \frac{2}{21} = \frac{19}{21}$$

   *Conclusion :* $\boxed{\mathbb{P}(N) = \frac{19}{21} \simeq 0.9048}$

4. La société peut s'attendre à 10 000 relances par jour de ce jeu.

   (a) Pour chaque entier naturel $i$ non nul. on note $Z_i$ le gain de la société à la $i^{ème}$ relance.
   Lors de la $i^{ème}$ relance, la société peux gagner 2 euros ou en perdre 18 sinon.
   Donc la variable aléatoire $Z_i$ a pour univers image $Z_i(\Omega) = \{2, -18\}$. La loi de $Z_i$ est

$$\mathbb{P}(Z_i = 2) = \mathbb{P}(N) = \frac{19}{21} \quad \text{et} \quad \mathrm{P}(Z_i = -18) = \frac{2}{21}$$

   donc

$$E(Z_i) = 2\,\mathbb{P}(Z_i = 2) - 18\,\mathbb{P}(Z_i = -18) = 2\,\frac{19}{21} - 18\,\frac{2}{21} = \frac{38-36}{21} = \frac{2}{21}$$

   *Conclusion :* $\boxed{E(Z_i) = \frac{2}{21} \simeq 0,1}$

   (b) Le gain journalier $Z$ est la somme des gains à chaque relance donc

$$Z = \sum_{i=1}^{10000} Z_i \quad \text{donc} \quad E(Z) = 10000\,\frac{2}{21} \simeq 1000$$

   *Conclusion :* $\boxed{\text{En moyenne, la société gagnera approximativement 1000 euros par jour.}}$

**Partie 2. Cas de joueurs invétérés.**

1. Un Joueur décide de jouer 100 parties consécutives que l'on suppose indépendantes.

   (a) $X$ est le nombre de parties gagnées en 100 parties indépendantes, la probabilité de gagner chacune étant de $\frac{2}{21}$. On effectue ainsi 100 expériences indépendantes avec une probabilité de succès de $\frac{2}{21}$, ainsi

   *Conclusion :* $\boxed{X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(100, \frac{2}{21}\right)}$

(b) On peut donc facilement conclure que

*Conclusion :* $\boxed{E(X) = \dfrac{200}{21} \text{ et } V(X) = \dfrac{2}{21}\dfrac{19}{21}100 = \dfrac{200 \cdot 19}{21^2}}$

(c) En 100 parties effectuées, $X$ sont gagnées (gain de $18X$ euros) et $100 - X$ perdues (perte de $2(100 - X)$ euros). La perte totale est donc $T = 2(100 - X) - 18X = 200 - 20X$.

*Conclusion :* $\boxed{T = 200 - 20X}$

On peut compter différemment : il mise 200 euros et reçoit 20 euros par partie gagnée donc $20X$ euros.

2. Avec $n$ parties au lieu de 100, on a $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{2}{21}\right)$. On considère l'événement

$$U = \ll \text{gagner au moins une partie} \gg$$

$U$ est l'événement contraire de $[X = 0]$, or

$$\mathbb{P}(X = 0) = \binom{n}{0}\left(\frac{2}{21}\right)^0\left(\frac{19}{21}\right)^n = \left(\frac{19}{21}\right)^n$$

Donc $\mathbb{P}(U) = 1 - \left(\dfrac{19}{21}\right)^n$. Déterminons le plus petit $n$ pour lequel $\mathbb{P}(U) \geq \dfrac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U) = 1 - \left(\frac{19}{21}\right)^n \geq \frac{1}{2} &\iff \left(\frac{19}{21}\right)^n \leq \frac{1}{2} \\
&\iff n \ln\left(\frac{19}{21}\right) \leq -\ln(2) \text{ car } x \mapsto \ln(x) \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \\
&\iff n \geq \frac{-\ln(2)}{\ln\left(\frac{19}{21}\right)} \simeq \frac{0,7}{0.1} \text{ car } \ln\left(\frac{19}{21}\right) < 0
\end{aligned}$$

*Conclusion :* $\boxed{\text{Il faut jouer au moins 7 ou 8 parties pour que la probabilité de gagner au moins une partie soit supérieure à 50\%}}$

**Partie 3. Contrôle de la qualité du jeu.**

On constate que, parfois, la fonction aléatoire est déréglée. Dans ce cas, elle place le premier jeton dans la case $(A, 1)$, les deux autres étant placés au hasard dans les cases restantes. On note $\Delta$ l'événement « la fonction aléatoire est déréglée » et on pose $\mathbb{P}(\Delta) = x$ avec $x \in ]0, 1[$.

1. Sachant $\Delta$, les positions sont déterminées par la seule combinaison des 2 autres positions parmi les 8 restantes. Il y a donc $\dbinom{8}{2} = \dfrac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$ positionnements possibles et équiprobables.

$H$ est à présent réduit à la ligne 1, $V$ à la colonne $A$ et $D$ à la diagonale descendante.

*Conclusion :* $\boxed{\mathbb{P}_\Delta(H) = \mathbb{P}_\Delta(V) = \mathbb{P}_\Delta(D) = \dfrac{1}{28}}$

2. Avec la question précédente, on a donc $\mathbb{P}_\Delta(N) = 1 - \dfrac{3}{28} = \dfrac{25}{28}$.

Sachant $\overline{\Delta}$, l'expérience se fait dans les conditions de la partie $I$ (le premier jeton est placé aléatoirement) et les probabilités sont donc celle de la partie $I$ :

$$\mathbb{P}_{\overline{\Delta}}(N) = \frac{19}{21}$$

$\left(\Delta, \overline{\Delta}\right)$ est un système complet d'événement donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N) &= \mathbb{P}_{\overline{\Delta}}(N) \cdot \mathbb{P}\left(\overline{\Delta}\right) + \mathbb{P}_\Delta(N) \cdot \mathbb{P}(\Delta) \\
&= x\frac{25}{28} + (1 - x)\frac{19}{21} \\
&= x\frac{25}{4 \cdot 7} + (1 - x)\frac{19}{3 \cdot 7} \\
&= \frac{25 \cdot 3 - 19 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 7}x + \frac{19}{21} \\
&= -\frac{x}{84} + \frac{19}{21}
\end{aligned}$$

*Conclusion :* $\boxed{\text{La probabilité que les jetons ne soient pas alignés est égale à } \mathbb{P}(N) = -\dfrac{x}{84} + \dfrac{19}{21}}$

3. Soit $G$ la variable aléatoire égale au gain réalisé par la société de jeu lors d'une partie jouée. La variable aléatoire $G$ a pour univers image $G(\Omega) = \{-18, 2\}$. La loi de $G$ est donnée par

$$\mathbb{P}\left(G=2\right) = \mathbb{P}\left(N\right) = -\frac{x}{84} + \frac{19}{21} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\left(G=-18\right) = \mathbb{P}\left(\bar{N}\right) = 1 - \mathbb{P}\left(N\right) = 1 + \frac{x}{84} - \frac{19}{21}$$

Donc

$$\begin{aligned} E\left(G\right) &= 2\,\mathbb{P}\left(G=2\right) - 18\,\mathbb{P}\left(G=-18\right) \\ &= 2\left(-\frac{x}{84} + \frac{19}{21}\right) - 18\left(1 + \frac{x}{84} - \frac{19}{21}\right) \\ &= -\frac{20}{84}x + \frac{2}{21} \end{aligned}$$

Par conséquent

$$E\left(G\right) > 0 \Longleftrightarrow -\frac{20}{84}x + \frac{2}{21} > 0 \Longleftrightarrow x < \frac{2}{21}\frac{84}{20} = \frac{2}{5}$$

*Conclusion :* $\boxed{\text{Le gain moyen est positif si, et seulement si } x < \frac{2}{5}.}$

4. On joue une partie. On constate que les jetons sont alignés. Sachant $\bar{N}$, on cherche à connaître avec quelle probabilité la fonction aléatoire a été déréglée. On cherche donc à calculer $\mathbb{P}_{\bar{N}}\left(\Delta\right)$. D'après la formule de Bayes :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{\bar{N}}\left(\Delta\right) &= \frac{\mathbb{P}\left(\Delta \cap \bar{N}\right)}{\mathbb{P}\left(\bar{N}\right)} = \frac{\mathbb{P}\left(\Delta\right)\mathbb{P}_{\Delta}\left(\bar{N}\right)}{\mathbb{P}\left(\bar{N}\right)} \\ &= \frac{x \cdot \frac{3}{28}}{1 - \left(-\frac{x}{84} + \frac{19}{21}\right)} = \frac{x \cdot \frac{3}{28}}{\frac{2}{21} + \frac{x}{84}} = \frac{9x}{x+8} \end{aligned}$$

*Conclusion :* $\boxed{\text{Si les jetons sont alignés, la fonction aléatoire a été déréglée avec une probabilité } \frac{9x}{x+8}.}$