

Corrigé du DM n°4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}$

1. (a) On a pour tout réel x : si $x \in D_f$, $-x \in D_f$ et

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-2x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^{2x}} + 1} = \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = f(x)$$

Donc f est paire.

(b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(e^{2x} + 1) - e^x e^{2x} 2}{(e^{2x} + 1)^2} = \frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2} \\ &= \frac{e^x}{(e^{2x} + 1)^2} (1 - e^{2x}) \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1 - e^{2x}$		+	-
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{1}{2} \searrow$	0

En $-\infty$: $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$.

En $+\infty$, on a par symétrie $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

(c) On étudie les variations de la différence : $g(x) = f(x) - x$. g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = f'(x) - 1$.

Sur $\mathbb{R}^-$, on a $f(x) > 0$ donc $f(x) > x$ et $f(x) = x$ n'y a pas de solution.

Sur $\mathbb{R}^+$, on a $f'(x) \leq 0$ donc $g'(x) < 0$.

On a donc g qui est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$, donc g est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans

$$\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(0) \right] =]-\infty, 1/2].$$

Comme $0 \in]-\infty, 1/2]$, alors d'après le théorème de la bijection l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution ℓ sur $\mathbb{R}^+$.

Conclusion : L'équation $f(\ell) = \ell$ a une unique solution ℓ sur $\mathbb{R}$.

(d) $g(1/2) = f(1/2) - 1/2 < 0$ donc $g(0) = 1/2 \geq g(\ell) \geq g(1/2)$ et comme g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^+$ et qu'ils en sont éléments.

Conclusion : $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.

(e) Pour $x \leq 0$ on a $|f'(x)| = f'(x)$ et

$$\begin{aligned} |f'(x)| - f(x) &= \frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2} - \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = \frac{e^x - e^{3x} - e^x(e^{2x} + 1)}{(e^{2x} + 1)^2} \\ &= \frac{-2e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Pour $x \geq 0$ on a $|f'(x)| = -f'(x)$ et

$$\begin{aligned} |f'(x)| - f(x) &= -\frac{e^x - e^{3x}}{(e^{2x} + 1)^2} - \frac{e^x}{1 + e^{2x}} = \frac{-e^x + e^{3x} - e^x(e^{2x} + 1)}{(e^{2x} + 1)^2} \\ &= \frac{-2e^x}{(e^{2x} + 1)^2} \leq 0 \end{aligned}$$

Et comme f est maximale en 0, on a bien

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f'(x)| \leq f(x) \leq f(0) = \frac{1}{2}$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

- (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: " $u_n \in [0, 1/2]$."

Initialisation : $u_0 = 0$ donc $u_0 \in [0, 1/2]$, $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \in [0, 1/2]$, alors, d'après la question 1.(c), on a $f(u_n) \in [0, 1/2]$.

Donc $u_{n+1} \in [0, 1/2]$, $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1/2]$.

- (b) f est continue sur $[0, 1/2]$ et dérivable sur l'intervalle $]0, 1/2[$. De plus, d'après les précédentes questions, $u_n \in [0, 1/2]$, $l \in [0, 1/2]$ et $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$ pour tout x de $[0, 1/2]$. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis

$$|f(u_n) - f(l)| = |u_{n+1} - l| \leq \frac{1}{2}|u_n - l|$$

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - l| \leq \frac{1}{2}|u_n - l|$.

- (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: " $|u_n - l| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$."

Initialisation : $|u_0 - l| = l \leq \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{0+1}}$, $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.

Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence, $|u_n - l| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$ alors, $|u_{n+1} - l| \leq \frac{1}{2}|u_n - l| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}$. $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - l| \leq \frac{1}{2^{n+1}}$.

- (d) Alors comme $|\frac{1}{2}| < 1$ on a $(\frac{1}{2})^{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et par encadrement $|u_n - l| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ et donc

Conclusion : la suite (u_n) converge vers l .

- (e) u_n donnera une valeur approchée de l à 10^{-3} près si $|u_n - l| \leq 10^{-3}$ ce qui sera réalisé si $\frac{1}{2^{n+1}} \leq 10^{-3}$

```
import numpy as np
u=0
p=1/2
while p>10**(-3) :
    p=p/2
    u=np.exp(u)/(1+np.exp(2*u))
print(u)
```

Exercice facultatif.

On considère l'application φ défini sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

1. On a

$$\varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$$

$$\frac{\varphi(x)}{x} = \frac{1}{x} - x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty$$

On a donc une branche parabolique verticale en $+\infty$.

2. φ est continue sur $]0, +\infty[$ comme produit de fonctions continues. De plus, par croissance comparée en 0, on a

$$\varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1 = \varphi(0)$$

φ est continue en 0.

Conclusion : φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

3. φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x > 0$, on a

$$\varphi'(x) = -2x \ln(x) - \frac{x^2}{x} = -x(2 \ln(x) + 1)$$

4. En 0, on calcule le taux d'accroissement : pour $x > 0$

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x - 0} = -x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \quad \text{par croissance comparée.}$$

Conclusion : φ est dérivable en 0 et $\varphi'(0) = 0$. Sa courbe a une tangente horizontale en 0.

5. On obtient le tableau de variations suivant

x	0	$1/\sqrt{e}$	$+\infty$
$2 \ln(x) + 1$	—	0	+
$-x$	—	—	—
$\varphi'(x)$	0	+	0
$\varphi(x)$	1	$\nearrow$	$1 + \frac{1}{2e}$
			$\searrow$
			$-\infty$

6. φ est strictement positive sur $[0, 1/\sqrt{e}]$, il n'y a donc pas de solution à $\varphi(x) = 0$ sur cet intervalle.

φ est continue et strictement décroissante sur $]1/\sqrt{e}, +\infty[$ dans $]-\infty, 1 + 1/(2e)[$. D'après le théorème de la bijection monotone, φ est bijective de $]1/\sqrt{e}, +\infty[$ dans $]-\infty, 1 + 1/(2e)[$. Comme $0 \in]-\infty, 1 + 1/(2e)[$, il existe une unique solution α à $\varphi(x) = 0$. De plus,

$$\varphi(\sqrt{2}) = 1 - 2 \ln(\sqrt{2}) = 1 - \ln(2) > 0 \quad \text{et} \quad \varphi(2) = 1 - 4 \ln(2) < 0$$

$$\varphi(2) < \varphi(\alpha) < \varphi(\sqrt{2}).$$

Comme φ est strictement décroissante sur $]1/\sqrt{e}, +\infty[$ et que $\sqrt{2}$, α et 2 en sont éléments, on obtient

$$\sqrt{2} < \alpha < 2.$$

Conclusion : il existe un unique réel α tel que $\varphi(\alpha) = 0$ et $\sqrt{2} < \alpha < 2$.

7. On considère les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par : $a_0 = \sqrt{2}$ et $b_0 = 2$.

$$\forall n \geq 0, \quad \text{si} \quad \varphi(a_n) \varphi\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \quad \text{alors} \quad a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$\forall n \geq 0, \quad \text{si} \quad \varphi(a_n) \varphi\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \quad \text{alors} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n$$

On reconnaît dans ce programme la méthode de dichotomie.

Pour écrire un programme en Python calculant a_7 et b_7 , il y a simplement à suivre la définition mathématique donnée, en plaçant les termes successifs des suites a et b dans **a** et **b**, les réaffectations pour $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = b_n$ étant inutiles.

```
import numpy as np
def phi(x):
    return 1-x**2*np.log(x)
a=np.sqrt(2)
b=2
for k in range(1,8):
    t=(a+b)/2
    if phi(a)*phi(t)<0:
        b=t
    else :
        a=t
print(a)
print(b)
```