Corrigé du DM n°5

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On a $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   et $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   enfin $A^2 + 2A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A^3$
2. Soient x et y réels tels que

$$xA + yA^2 = 0_2 \Leftrightarrow x \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y & x+y & x+y \\ x+y & y & y \\ x+y & y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + y = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

   Donc la famille $\left(A, A^2\right)$ est libre.
3. Comme la famille $\left(A, A^2\right)$ est libre, si a_n et b_n existent, ils sont alors uniques. L'existence se prouve par récurrence :
   Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : "il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = a_nA + b_nA^2$"
   Initialisation : Pour $n = 1$ on a $A^1 = 1A + 0A^2$ donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ conviennent. $\mathcal{P}(1)$ est donc vraie.
   Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Il existe a_n et b_n réels avec $A^n = a_nA + b_nA^2$, alors

$$A^{n+1} = A^nA = \left(a_nA + b_nA^2\right)A = a_nA^2 + b_nA^3 = a_nA^2 + b_n\left(A^2 + 2A\right) = 2b_nA + (a_n + b_n)A^2$$

   Donc $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$ conviennent.
   $\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.
   Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique couple $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $A^n = a_nA + b_nA^2$.
4. On peut écrire

```
import numpy as np
n=eval(input('n=?'))
a=1
b=0
for k in range(1,n+1):
    u=a #on stocke la valeur de a_k
    a=2*b
    b=u+b
print(a)
print(b)
```

5. (a) Comme $a_{n+1} = 2b_n$ pour tout $n \geq 1$, on a aussi $a_{n+2} = 2b_{n+1}$ pour tout entier n.
   Comme $b_{n+1} = a_n + b_n$ pour tout $n \geq 1$ on a $a_{n+2} = 2a_n + 2b_n$.
   et comme $b_n = \frac{1}{2}a_{n+1}$ pour $n \geq 1$ on a finalement

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$$

   (b) La suite a est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
   Son équation caractéristique est : $r^2 - r - 2 = 0$ qui a pour racines $r = -1$ et $r = 2$

Donc pour tout $n \geq 1$ on a a_n de la forme (avec x et y réels à déterminer)

$$a_n = x\,(-1)^n + y\,2^n.$$

Comme $A = 1A + 0A^2$ et que $A^2 = 0A + 1A^2$ on a $a_1 = 1$ et $a_2 = 0$ donc x et y sont solutions de

$$\left\{\begin{array}{l} a_1 = x\,(-1)^1 + y2^1 \\ a_2 = x\,(-1)^2 + y2^2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 1 = -x + 2y \\ 0 = x + 4y \quad L_2 + L_1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 1 = -x + 2y \\ 1 = 6y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x = -2/3 \\ y = 1/6 \end{array}\right.$$

Donc pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_n = -\frac{2}{3}\,(-1)^n + \frac{1}{6}2^n$$

et pour tout $n \geq 1$

$$b_n = \frac{1}{2}a_{n+1} = \frac{1}{3}\,(-1)^n + \frac{1}{6}2^n$$

(c) Finalement on trouve pour tout entier n supérieur ou égal à 1

$$A^n = \left(-\frac{2}{3}\,(-1)^n + \frac{1}{6}2^n\right)A + \left(\frac{1}{3}\,(-1)^n + \frac{1}{6}2^n\right)A^2$$

Exercice facultatif.

1. $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour x réel fixé, l'intégrale sur l'intervalle $[x, 2x]$ de la fonction continue $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est bien définie.

   $\boxed{\text{L'intégrale } \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt \text{ est donc définie pour tout réel } x.}$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, on effectue le changement de variables linéaire $u = -t$. On a alors

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\sqrt{(-u)^2+1}}(-du) = -\int_{-x}^{2\,(-x)} \frac{1}{\sqrt{u^2+1}}du = -f(-x).$$

   $\boxed{f \text{ est donc une fonction impaire.}}$

3. (a) $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Une de ses primitives $G(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt$ est donc définie et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt = \int_0^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt - \int_0^{x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt = G(2x) - G(x)$$

   $\boxed{f \text{ est donc de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.}$

   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2\,G'(2x) - G'(x) = 2\frac{1}{\sqrt{(2x)^2+1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

   Comme $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2+\frac{1}{4}}$ pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}} - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$.

   $\boxed{f \text{ est donc strictement croissante sur } \mathbb{R}.}$

4. (a) On a pour $t > 0$,

$$\begin{array}{rcl} t^2 & \leqslant t^2+1 \leqslant & t^2+2t+1, \\ \sqrt{t^2} & \leqslant \sqrt{t^2+1} \leqslant & \sqrt{t^2+2t+1} \quad \text{car } t \mapsto \sqrt{t} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^*, \\ t & \leqslant \sqrt{t^2+1} \leqslant & \sqrt{(t+1)^2} = t+1, \\ \frac{1}{t+1} & \leqslant \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} \leqslant & \frac{1}{t} \quad \text{car } t \mapsto \frac{1}{t} \text{ est décroissante sur } \mathbb{R}_+^*. \end{array}$$

   Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, on intègre la précédente inégalité sur $[x, 2x]$.

$$\int_x^{2x} \frac{1}{t+1}dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}dt \leqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t}dt$$

$$\begin{array}{rcl} [\ln(t+1)]_{t=x}^{t=2x} & \leqslant f(x) \leqslant & [\ln(t)]_{t=x}^{t=2x} \\ \ln(2x+1) - \ln(x+1) & \leqslant f(x) \leqslant & \ln(2x) - \ln(x). \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2).}$$

(b) D'après la question **4.(a)**,

$$\ln(2x+1) - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{2x+1}{x+1}\right) = \ln\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2).$$

Or $\ln\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right) \to \ln(2)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Le théorème d'encadrement nous permet de conclure que $\boxed{f(x) \text{ tend vers } \ln(2) \text{ lorsque } x \text{ tend vers } +\infty.}$

(c) La fonction f étant impaire, on en déduit que $f(x)$ tend vers $-\ln(2)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$-\ln(2)$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$\ln(2)$

(d) f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-\ln(2), \ln(2)[$, d'après le théorème de la bijection il existe donc une unique solution à l'équation $f(x) = 0 \in]-\ln(2), \ln(2)[$. De plus, $f(0) = 0$.

$\boxed{0 \text{ est donc l'unique solution de l'équation } f(x) = 0.}$

5. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{array}{rcll} x^2 & < & x^2+1 & \\ |x| = \sqrt{x^2} & < & \sqrt{x^2+1} & \text{car } t \mapsto \sqrt{t} \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+, \\ -x \leq |x| & < & \sqrt{x^2+1} & \text{car pour } x \in \mathbb{R}, \quad -x \leq |x|. \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 < x + \sqrt{x^2+1}}$$

(b) Puisque $x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et $t \mapsto \ln(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction h est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que composée de fonctions dérivables.
Pour $x \in \mathbb{R}$, calculons $h'(x)$.

$$\begin{array}{rcl} h'(x) & = & \dfrac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \dfrac{1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} \\ & = & \dfrac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}\,(x+\sqrt{x^2+1})} \end{array}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

(c) h est l'unique primitive de $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}$ qui s'annule en 0. On a pour $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$.
f peut donc s'écrire pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = h(2x) - h(x) = \ln(2x + \sqrt{(2x)^2+1}) - \ln(x + \sqrt{x^2+1}) = \ln\left(2\frac{x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln(2) + \ln\left(\frac{x+\sqrt{x^2+\frac{1}{4}}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)}$$

6. (a) Pour $x > 0$, on utilise le fait que $x = \int_x^{2x} 1 dt$. Calculons alors $x - f(x)$

$$\begin{array}{rcl} x - f(x) & = & \displaystyle\int_x^{2x} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right) dt = \int_x^{2x} \frac{\sqrt{t^2+1}-1}{\sqrt{t^2+1}} dt \\ & = & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{(\sqrt{t^2+1}-1)\,(\sqrt{t^2+1}+1)}{\sqrt{t^2+1}\,(\sqrt{t^2+1}+1)} dt \\ & = & \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sqrt{t^2+1}^2 - 1}{\sqrt{t^2+1}\,(\sqrt{t^2+1}+1)} dt. \end{array}$$

$$\boxed{\forall x > 0, \quad x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\,(\sqrt{t^2+1}+1)} dt.}$$

(b) Pour $t \geq 0$, $\dfrac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\,(\sqrt{t^2+1}+1)} \geq 0$, donc pour $x \geq 0$

$$x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\,(\sqrt{t^2+1}+1)} dt \geq 0.$$

De plus, pour $t \geq 0$, $\sqrt{t^2+1}\,(\sqrt{t^2+1}+1) \geq 2$, ainsi pour $x \geq 0$

$$\begin{aligned} x - f(x) &= \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\,(\sqrt{t^2+1}+1)} dt \\ &\leq \int_x^{2x} \frac{t^2}{2} dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_{t=x}^{t=2x} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \tfrac{(2x)^3}{6} - \tfrac{x^3}{6} = \tfrac{7}{6}x^3.}$$

(c) Pour $x > 0$, la question **6.(b)** nous permet d'écrire

$$\begin{aligned} 0 \leqslant & \quad x - f(x) & \leqslant \frac{7}{6}x^3 \\ 0 \leqslant & \quad 1 - \tfrac{f(x)}{x} & \leqslant \frac{7}{6}x^2, \qquad \text{on a divisé par } x > 0. \end{aligned}$$

Or $\frac{7}{6}x^2$ tend vers 0 lorsque x tend vers 0^+. D'après le théorème d'encadrement, $\boxed{\frac{f(x)}{x} \text{ tend vers 1 lorsque } x \text{ tend vers } 0^+.}$

(d) Pour $x < 0$, puisque $-x > 0$, on a grâce à la question **6.(b)**

$$\begin{aligned} 0 \leqslant & \quad (-x) - f(-x) & \leqslant \frac{7}{6}(-x)^3 \\ 0 \leqslant & \quad 1 - \tfrac{f(-x)}{-x} & \leqslant \frac{7}{6}(-x)^2, \qquad \text{on a divisé par } -x > 0 \\ 0 \leqslant & \quad 1 - \tfrac{f(x)}{x} & \leqslant \frac{7}{6}x^2, \qquad \text{d'après la question } \mathbf{2.}\text{, car } f \text{ est impaire.} \end{aligned}$$

D'après le théorème d'encadrement, $\boxed{\frac{f(x)}{x} \text{ tend donc vers 1 lorsque } x \text{ tend vers } 0^-.}$