Corrigé du DM n°6

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(1)=1 \text{ et } f(x)=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{\ln(x)}{2} \text{ si } x\neq 1.$$

1. $x\mapsto f(x)$ est continue en tout x tel que $x\neq 1$ et $x>0$ donc sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.
   Vérifions la continuité en 1.
   Pour $x\neq 1$, on pose $h=x-1$. On a

   $$f(x)=\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{\ln(x)}{2}=\frac{h+2}{h}\cdot\frac{\ln(1+h)}{2}$$

   Or $\ln(1+h)\underset{h\to 0}{\sim} h$ donc

   $$\frac{\ln(1+h)}{h}\underset{h\to 0}{\to} 1$$

   ainsi $f(x)\underset{x\to 1}{\to} 1=f(1)$. Donc f est bien continue en 1. Finalement f est une fonction continue sur $]0,+\infty[$.

2. f est dérivable sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables

   $$f'(x)=\frac{x^2-1-2x\ln(x)}{2x(x-1)^2}=-\frac{\ln(x)-\frac{x^2-1}{2x}}{(x-1)^2}$$

   Soit $g(x)=\ln(x)-\frac{x^2-1}{2x}$. g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

   $$g'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2x^2-(x^2-1)}{2x^2}=\frac{2x-x^2-1}{2x^2}=\frac{-(x-1)^2}{2x^2}<0.$$

   Donc

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	

   Donc f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$ et strictement décroissante sur $]0,1[$.

3. Pour tout x strictement positif et différent de 1, la dérivée f' de f vérifie :

   $$f'(x)=\frac{x^2-1-2x\ln(x)}{2x(x-1)^2}=\frac{2x(x-1)-2x\ln(x)-(x-1)^2}{2x(x-1)^2}=\frac{(x-1)-\ln(x)}{(x-1)^2}-\frac{1}{2x}$$

4. (a) Donnons le développement limité de $t\mapsto\ln(1+t)$ à l'ordre 2 au voisinage de 0.

   $$\ln(1+t)\underset{0}{=}t-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right).$$

   (b) On calcule la limite du taux d'accroissement en 1. Soit $x\neq 1$,

   $$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{\ln(x)}{2}-1}{x-1}=\frac{(x+1)\ln(x)-2(x-1)}{2(x-1)^2}$$

   On étudie le comportement de ce taux d'accroissement au voisinage de 1. Si on pose $x=1+t$, lorsque t est au voisinage de 0, x est au voisinage de 1, ainsi

   $$\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{(x+1)\ln(x)-2(x-1)}{2(x-1)^2}=\frac{(2+t)\ln(1+t)-2t}{2t^2}$$

   Or lorsque t est au voisinage de 0

   $$\begin{aligned}\frac{(2+t)\ln(1+t)-2t}{2t^2}&\underset{0}{=}\frac{(2+t)\left(t-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)\right)-2t}{2t^2}\\&\underset{0}{=}\frac{2t-t^2+t^2+o\left(t^2\right)-2t}{2t^2}\\&\underset{0}{=}\frac{o\left(t^2\right)}{2t^2}\end{aligned}$$

Or, par définition, $\dfrac{o\left(t^2\right)}{2t^2} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$, ainsi on peut en conclure que

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0 = f'(1)$$

Par conséquent, f est dérivable en 1 et $f'(1)=0$.

(c) f' est continue sur $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. Déterminons la continuité de f' en 1.

$$f'(x) = \frac{(x-1)-\ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x}$$

On pose $x = 1+t$, ainsi

$$\frac{(x-1)-\ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x} = \frac{t-\ln(1+t)}{t^2} - \frac{1}{2(1+t)}$$

Or lorsque t est au voisinage de 0

$$\frac{t-\ln(1+t)}{t^2} - \frac{1}{2(1+t)} \underset{0}{=} \frac{t-\left(t-\frac{t^2}{2}+o\left(t^2\right)\right)}{t^2} - \frac{1}{2(1+t)} \underset{0}{=} \frac{1}{2} + o\left(1\right) - \frac{1}{2(1+t)}$$

Or, par définition, $o\left(1\right) \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $1+t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$, donc $f'(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0 = f'(1)$. f' est continue en 1.

Par conséquent, f' est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Donc f est de classe C^1 sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

5. (a) Soit $g(x) = \ln(x) - (x-1)$. g est dérivable sur $]0,+\infty[$ et

$$g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Donc pour tout $x>1$, on a : $g(x)<0$ et $\ln(x) < (x-1)$.

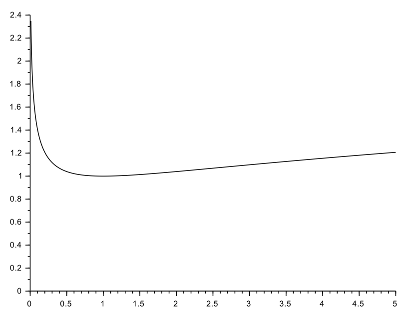
(b) Si $x>1$, alors $\dfrac{x+1}{x-1} > 0$ et donc

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{\ln(x)}{2} < \frac{x+1}{x-1}\cdot\frac{x-1}{2} = \frac{x+1}{2}$$

or pour $x>1$, $\dfrac{x+1}{2} < \dfrac{x+x}{2} = x$, donc $f(x) < x$.

Donc pour tout $x>1$ on a : $f(x)<x$.

6. On a la représentation graphique de f suivante



7. Soit a un réel supérieur à 1.

(a) Pour $n\in\mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$ la proposition : "x_n est bien défini et $x_n > 1$."

Initialisation : $x_0 = a > 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité : On suppose que pour un $n\in\mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence $x_n \geq 1$, comme f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$, on a

$$x_{n+1} = f\left(x_n\right) > f(1) = 1$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est donc vraie.

Conclusion : Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ existe et $x_n>1$.

(b) Or si $x > 1$ alors $f(x) < x$. Donc, comme $x_n > 1$, $x_{n+1} = f(x_n) > x_n$ et cette suite est décroissante. Comme elle est minorée par 1, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \geq 1$.
f est continue sur $[0, +\infty[$, donc en l. On a donc $f(l) = l$. Or si $l > 1$ alors $f(l) < l$ et donc $f(l) \neq l$. Comme $l \geq 1$, alors nécessairement $l = 1$.

8. Etude de la vitesse avec laquelle la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ tend vers $l = 1$.

(a) f' est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$, f' est continue en 1.

$$f'(x) \underset{x\to 1}{\longrightarrow} 0.$$

Donc si x est suffisamment proche de 1, $|f'(x)|$ sera aussi petit que l'on veut et donc plus petit que $\frac{1}{3}$. Ainsi il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $x \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ alors

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{3}.$$

Comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, il existe n_0 tel que si $n \geq n_0$ alors $x_n \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$.

(b) Si $n \geq n_0$ alors $x_n \in [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$. f est dérivable sur $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$, on applique l'inégalité des accroissements finis sur $[1-\varepsilon, 1+\varepsilon]$ entre x_n et 1, alors

$$|f(x_n) - 1| \leq \frac{1}{3}|x_n - 1|$$

(c) On a alors, par récurrence, pour tout $n \geq n_0$

$$|x_n - 1| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \underbrace{|x_{n_0} - 1|\, 3^{n_0}}_{=K}$$

D'où, pour $n \geq n_0$

$$0 \leq \frac{|x_n - 1|}{1/2^n} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n K$$

Par encadrement, $\dfrac{|x_n - 1|}{1/2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$x_n - 1 \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right).$$

Exercice facultatif.

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que :

$$I_n \underset{+\infty}{=} a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

φ_n étant continue, l'intégrale est bien définie.

1. On a

$$I_0 = \int_0^1 \varphi_0(x)\, dx = \int_0^1 e^{-2x}\, dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}e^{-2} + \frac{1}{2}.$$

De plus,

$$I_1 = \int_0^1 \varphi_1(x)\, dx = \int_0^1 (1-x)\, e^{-2x} dx$$

en intégrant par parties avec

$$u(x) = (1-x) \quad u'(x) = -1$$

$$v'(x) = e^{-2x} \quad v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

les fonctions u et v étant de classe C^1 on a :

$$\begin{aligned} I_1 &= \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}(1-x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{-2x}dx \\ &= \frac{1}{2} - \left[-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2} - \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}e^{-2} \end{aligned}$$

2. Comme on ne peut pas calculer facilement I_n, pour comparer I_n et I_{n+1} on compare d'abord leurs contenus :

$$\begin{aligned} \varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x) &= (1-x)^{n+1}e^{-2x} - (1-x)^n e^{-2x} = (1-x)^n(1-x-1)e^{-2x} \\ &= -x(1-x)^n e^{-2x} \leq 0 \text{ sur } [0,1] \end{aligned}$$

Donc $\varphi_{n+1} \leq \varphi_n$ sur $[0,1]$. Comme $0 \leq 1$ (bornes) alors par croissance de l'intégrale

$$\int_0^1 \varphi_{n+1}(x)\, dx \leq \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx$$

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } I \text{ est décroissante}}$

3. Pour tout $x \in [0,1]$: $(1-x)^n e^{-2x} \geq 0$ donc $(0 \leq 1)$ on a pour tout entier naturel n

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx \geq 0.$$

La suite I étant décroissante et minorée par 0, d'après le théorème de la limite monotone, elle est convergente vers une limite $\ell \geq 0$.

4. La fonction $x \to e^{-2x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc pour$x \in [0,1]$ on a

$$e^{-2x} \leq e^0 = 1$$

On a alors par croissance de l'intégrale. Pour tout $x \in [0,1]$: $e^{-2x} \leq 1$ et $(1-x)^n \geq 0$ donc $(1-x)^n e^{-2x} \leq (1-x)^n$ d'où

$$\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx \leq \int_0^1 (1-x)^n\, dx$$

or

$$\int_0^1 (1-x)^n\, dx = \left[\frac{-1}{n+1}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$$

ainsi

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Par encadrement, on a alors } I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.}$

5. On a

$$I_{n+1} = \int_0^1 (1-x)^{n+1} e^{-2x}dx$$

on intègre par parties en posant

$$u(x) = (1-x)^{n+1} \quad u'(x) = -(n+1)(1-x)^n$$

$$v'(x) = e^{-2x} \quad v(x) = -\frac{1}{2}e^{-2x}$$

les fonctions u et v étant de classe C^1 on a :

$$I_{n+1} = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x}(1-x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n+1}{2}(1-x)^n e^{-2x}dx = \frac{1}{2} - \frac{n+1}{2}\int_0^1 (1-x)^n e^{-2x}dx = \frac{1}{2}[1-(n+1)I_n]$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n.}$

6. Comme $2I_{n+1} = 1-(n+1)I_n$ on a alors

$$n\,I_n + I_n = 1 - 2I_{n+1} \quad \Rightarrow \quad n\,I_n = 1 - 2I_{n+1} - I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Conclusion : $\boxed{n\,I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.}$

7. D'après la question précédente, on a

$$nI_n - 1 = -2I_{n+1} - I_n \quad \Leftrightarrow \quad n\,(nI_n - 1) = -2n\,I_{n+1} - n\,I_n$$

on fait apparaître $(n+1)\,I_{n+1}$ car $(n+1)\,I_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$

$$n\,(nI_n - 1) = -2\frac{n}{n+1}\,(n+1)\,I_{n+1} - n\,I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -3$$

Conclusion : $\boxed{n\,(n\,I_n - 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -3.}$

8. Pour trouver valeurs de a, b, c, on cherche par identification : soit a, b et c des réels tels que

$$I_n \underset{+\infty}{=} a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

— Comme $I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors

$$a = 0$$

— Ainsi

$$nI_n \underset{+\infty}{=} b + \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b$$

or $n\,I_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc

$$b = 1$$

— Donc

$$n\,(n\,I_n - 1) \underset{+\infty}{=} c + o\,(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} c$$

or $n\,(n\,I_n - 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -3$ donc

$$c = -3$$

De plus, vérifions que $I_n - a - \frac{b}{n} - \frac{c}{n^2} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On a

$$n^2\left(I_n - a - \frac{b}{n} - \frac{c}{n^2}\right) = n^2\left(I_n - \frac{1}{n} + \frac{3}{n^2}\right) = n\,(nI_n - 1) + 3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Conclusion : $\boxed{\text{Les seules valeurs possibles sont } a = 0,\ b = 1 \text{ et } c = -3.}$