

Corrigé du DM n°9

1. (a) g_0 est C^∞ sur $\mathbb{R}^+$ (comme quotient de deux fonctions C^∞ avec un dénominateur non nul), strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ comme inverse d'une fonction strictement croissante et (strictement) positive.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1+x)^2} = 0.$$

L'équation de la tangente en 0 est $y = g'_0(0)(x-0) + g_0(0)$.

Or, pour tout $x \geq 0$, $g'_0(x) = -\frac{2}{(1+x)^3}$, donc la tangente en 0 a pour équation $y = -2x + 1$.

Rq : En fait, il s'agit d'une demi-tangente, car g_0 n'est pas définie sur $] -\infty, 0[$.

- (b) Soit $n \geq 1$.

g_n est C^∞ sur $[0, +\infty[$ comme composée, puissance et quotient de fonctions usuelles et

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g'_n(x) = \frac{n \frac{1}{1+x} (\ln(1+x))^{n-1} (1+x)^2 - 2(1+x)(\ln(1+x))^n}{(1+x)^4}$$

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g'_n(x) = \frac{\overbrace{(1+x)(\ln(1+x))^{n-1}}^{\geq 0} (n - 2\ln(1+x))}{\underbrace{(1+x)^4}_{\geq 0}}$$

D'où $g'_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow n - 2\ln(1+x) \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 2\ln(1+x) \Leftrightarrow 1+x \leq e^{n/2} \Leftrightarrow x \leq e^{n/2} - 1$.

Comme $n/2 > 0$, $e^{n/2} > 1$ et donc $e^{n/2} - 1 \in [0, +\infty[$.

On a donc : g_n croissante sur $[0, e^{n/2} - 1]$ et décroissante sur $[e^{n/2} - 1, +\infty[$.

$$M_n = g_n(e^{n/2} - 1)$$

$$g_n(0) = \frac{(\ln(1))^n}{1^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) \underset{\text{en posant } y=1+x}{=} \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{(\ln y)^n}{y^2} = 0 \text{ par croissances comparées.}$$

- (c) D'après le tableau de variations de g_n , g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ en $e^{n/2} - 1$ qui vaut :

$$M_n = g_n(e^{n/2} - 1) = \frac{(\ln(e^{n/2}))^n}{(e^{n/2})^2} = \frac{(n/2)^n}{e^n} = \left(\frac{n}{2e}\right)^n.$$

$\ln(M_n) = n \ln\left(\frac{n}{2e}\right)$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = +\infty.$$

- (d) Pour tout $n \geq 1$, $\frac{g_n(x)}{1/x^{3/2}} \sim \frac{(\ln(1+x))^n}{x^{1/2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ (toujours par croissances comparées),

$$\text{donc } g_n(x) = \underset{x \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{x^{3/2}} \right).$$

2. (a) Soit $A > 0$.

$$\int_0^A g_0(t) dt = \int_0^A \frac{1}{(1+t)^2} dt = \left[-\frac{1}{1+t} \right]_0^A = -\frac{1}{1+A} + 1 \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 1,$$

donc $I_0 = \int_0^{+\infty} g_0(t) dt$ converge et vaut 1.

- (b) Soit $n \geq 1$.

- g_n et $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ sont continues et positives sur $[1, +\infty[$.

- $g_n(t) = \underset{t \rightarrow +\infty}{o} \left(\frac{1}{t^{3/2}} \right)$ d'après 1d.

- Or, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} dt$ converge (Riemann et $3/2 > 1$), donc, d'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, $\int_1^{+\infty} g_n(t) dt$ converge aussi.

- Enfin, comme g_n est continue sur $[0, 1]$, $\int_0^1 g_n(t) dt$ existe.

Par suite, $I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt$ converge.

(c) Soit $A > 0$.

Posons $u(t) = (\ln(1+t))^{n+1}$, $u'(t) = \frac{(n+1)}{1+t}(\ln(1+t))^n$, $v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$, $v(t) = -\frac{1}{1+t}$.

Comme u et v sont de classe C^1 sur $[0, A]$, on peut intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^A g_{n+1}(t)dt &= \left[-\frac{(\ln(1+t))^{n+1}}{1+t} \right]_0^A + \int_0^A \frac{(n+1)}{1+t}(\ln(1+t))^n \frac{1}{1+t} dt \\ &= -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} + (n+1) \int_0^A g_n(t)dt.\end{aligned}$$

Or, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A g_{n+1}(t)dt = I_{n+1}$, $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A g_n(t)dt = I_n$ (car I_n et I_{n+1} convergent)

et $\lim_{A \rightarrow +\infty} -\frac{(\ln(1+A))^{n+1}}{1+A} = 0$ (par croissances comparées),

donc, en passant à la limite dans l'égalité précédente, on obtient bien :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n.$$

(d) Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$ (HR_n).

Initialisation : On a $I_0 = 1$ et $0! = 1$, donc on a bien HR_0 .

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons HR_n vérifiée.

Alors $I_{n+1} = (n+1)I_n \stackrel{HR_n}{=} (n+1)n! = (n+1)!$

On a bien HR_{n+1} .

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$.

Exercice facultatif.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie, pour tout réel t , par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ \frac{1}{(1+t)^2} & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

1. f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f'(t) = \frac{-2}{(1+t)^3} < 0$.

En 0^+ on a $f(t) \rightarrow 1$ et $f'(t) \rightarrow -2$ donc la courbe représentative de f a une demi tangente de pente -2 en 0^+

En $+\infty$ on a $f(t) \rightarrow 0$

On trace donc l'axe $]-\infty, 0]$ puis la tangente en 0 et l'asymptote $]0, +\infty[$

2. Comme f est une densité, $\int_{-\infty}^x f(t)dt$ converge.

— Pour $x \leq 0$: $\int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$

— Pour $x \geq 0$: $\int_{-\infty}^x f(t)dt = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x \frac{1}{(1+t)^2}dt = \left[\frac{-1}{1+t} \right]_0^x = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$

3. Pour $\alpha \geq 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha f(t)dt &= \frac{1}{2} & \iff & \frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{1}{2} \\ & & \iff & 2\alpha = 1 + \alpha \\ & & \iff & \alpha = 1\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\alpha = 1 \text{ est le seul réel positif (et le seul réel tout court) tel que } \int_0^\alpha f(t)dt = \frac{1}{2}}$

4. Soit $x \in [0, +\infty[$ fixé.

On considère la fonction φ_x définie sur $[0; +\infty[$ par : $\forall u \in [0, +\infty[$, $\varphi_x(u) = \int_{x-u}^{x+u} f(t)dt$.

(a) On a

$$\varphi_x(0) = \int_{x-0}^{x+0} f(t)dt = \int_x^x f(t)dt = 0$$

Et comme $\int_{x-u}^{x+u} f(t)dt = \int_{x-u}^x f(t)dt + \int_x^{x+u} f(t)dt$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge alors

$$\begin{aligned}\int_{x-u}^{x+u} f(t) dt &= \int_{x-u}^x f(t) dt + \int_x^{x+u} f(t) dt \\ &\rightarrow \int_{-\infty}^x f(t) dt + \int_x^{+\infty} f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f = 1\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\varphi_x(0) = 0 \text{ et } \lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi_x(u) = 1}$

(b) Soient $0 < u < v$ alors

$$\begin{aligned}\varphi_x(v) - \varphi_x(u) &= \int_{x-v}^{x+v} f(t) dt - \int_{x-u}^{x+u} f(t) dt \text{ par Chasles :} \\ &= \int_{x-v}^{x-u} f(t) dt + \int_{x+u}^{x+v} f(t) dt\end{aligned}$$

et comme $x-v < x-u$ et que $f \geq 0$ alors $\int_{x-v}^{x-u} f(t) dt \geq 0$

Donc $\forall (u, v) \in [0, +\infty[^2, u < v \implies \varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geq \int_{x+u}^{x+v} f(t) dt$.

Comme on a alors $x+v > x+u$ et $f(t) \geq f(x+u)$ (car f y est décroissante) sur $[x+u, x+v]$ alors $\int_{x+u}^{x+v} f(t) dt > \int_{x+u}^{x+v} f(x+u) dt > 0$

Donc, $\forall (u, v) \in [0, +\infty[^2, v > u \implies \varphi_x(v) > \varphi_x(u)$ ce qui est la définition d'une fonction strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Conclusion : $\boxed{\varphi_x \text{ est strictement croissante sur } [0; +\infty[}$

(c) On admet que φ_x est continue sur $[0; +\infty[$.

Elle est donc strictement croissante et continue donc bijective de $[0, +\infty[$ dans $[\lim_0 \varphi_x, \lim_{+\infty} \varphi_x[= [0, 1[$

Comme $\frac{1}{2} \in [0, 1[$ alors l'équation $\varphi_x(u) = \frac{1}{2}$, d'inconnue u , admet une solution et une seule dans $[0; +\infty[$.

On note $U : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in [0; +\infty[$, associe $U(x)$ l'unique solution de l'équation $\varphi_x(u) = \frac{1}{2}$.

Ainsi, pour tout $x \in [0; +\infty[$, on a : $\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t) dt = \frac{1}{2}$.

5. (a) Soit $x \in [0; \frac{1}{2}[$

On calcule $\int_{x-(1-x)}^{x+(1-x)} f(t) dt = \int_{2x-1}^1 f(t) dt$

Et comme $2x-1 \leq 0$ alors $\int_{2x-1}^1 f(t) dt = \int_{2x-1}^0 0 dt + \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} dt$

$$\begin{aligned}\int_{x-(1-x)}^{x+(1-x)} f(t) dt &= \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2} dt \\ &= \left[\frac{-1}{1+t} \right]_0^1 = \frac{-1}{2} + 1 \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Donc pour tout $x \in [0; \frac{1}{2}[$, $U(x) = 1-x$ est bien une solution. C'est donc la bonne.

(b) Pour tout $x \in [\frac{1}{2}; +\infty[$,

$$\varphi_x(x) = \int_{x-x}^{x+x} f(t) dt = \int_0^{2x} \frac{1}{(1+t)^2} dt$$

et on procède par minoration : $\frac{1}{(1+t)^2} \geq \frac{1}{(1+2x)^2} \geq \frac{1}{(2x)^2}$ et comme $0 \leq 2x$

$$\int_0^{2x} \frac{1}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^{2x} \frac{1}{4x^2} dt = \frac{2x}{4x^2} = \frac{1}{2}$$

(On pouvait aussi calculer explicitement l'intégrale puis prouver l'inégalité sur le résultat obtenu)

Donc $\varphi_x(x) \geq \frac{1}{2}$,

On a donc $\varphi_x(x) \geq \varphi_x(U(x))$ et comme φ_x est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et que x et $U(x)$ en sont éléments,

$x \geq U(x)$ et donc $x - U(x) \geq 0$,

Enfin, comme $x - U(x) \geq 0$, alors $f(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$ sur tout l'intervalle $[x - U(x), x + U(x)]$ et

$$\begin{aligned} \int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t) dt &= \int_{x-U(x)}^{x+U(x)} \frac{1}{(1+t)^2} dt \\ &= \left[\frac{-1}{1+t} \right]_{x-U(x)}^{x+U(x)} \\ &= \frac{-1}{1+x+U(x)} + \frac{1}{1+x-U(x)} \\ &= \frac{-(1+x-U(x)) + (1+x+U(x))}{(1+x+U(x))(1+x-U(x))} \\ &= \frac{2U(x)}{(1+x)^2 - U(x)^2} \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \varphi_x(U(x)) = \frac{1}{2} &\iff \frac{2U(x)}{(1+x)^2 - U(x)^2} = \frac{1}{2} \\ &\iff U(x)^2 + 4U(x) - (1+x)^2 = 0 \end{aligned}$$

équation du second degré en $U(x)$ qui a pour discriminant $\Delta = 16 + 4(1+x)^2 = 4(4 + (1+x)^2)$ et pour racines

$$\begin{aligned} U(x) &= \frac{-4 \pm 2\sqrt{4 + (1+x)^2}}{2} \\ &= -2 \pm \sqrt{4 + (1+x)^2} \end{aligned}$$

et comme $-2 - \sqrt{4 + (1+x)^2} < 0$ et que $U(x) \geq 0$ alors

$$\text{Conclusion : } \boxed{U(x) = -2 + \sqrt{4 + (1+x)^2}}$$

6. (a) Pour $x \geq \frac{1}{2}$ on a $4 + (1+x)^2 \geq 0$ donc U est continue sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$

De plus elle est continue ($\forall x \in [0, \frac{1}{2}[$, $U(x) = 1 - x$) sur $[0, \frac{1}{2}[$

En $\frac{1}{2}^-$ on a $U(x) = 1 - x \rightarrow \frac{1}{2}$ et

$$U\left(\frac{1}{2}\right) = -2 + \sqrt{4 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2} = -2 + \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = -2 + \sqrt{\frac{25}{4}} = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

Donc U est continue en $\frac{1}{2}^-$

$$\text{Conclusion : } \boxed{U \text{ est continue sur } [0, +\infty[}$$

(b) De même, U est dérivable sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$ ($4 + (1+x)^2 > 0$) et sur $[0, \frac{1}{2}[$

En $\frac{1}{2}$ il faut tester si les dérivées à droite et à gauche sont égales :

Comme U est continue en $\frac{1}{2}$, on peut utiliser le théorème de prolongement C^1 :

— Pour $x < \frac{1}{2}$: $U'(x) = -1 \rightarrow -1$ donc U est dérivable à droite de $\frac{1}{2}$ et sa dérivée à droite est de -1

— Pour $x > \frac{1}{2}$: $U'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4 + (1+x)^2}} 2(1+x) \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{4 + \frac{9}{4}}} 2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$:

Donc U est dérivable à gauche en $\frac{1}{2}$ et sa dérivée à gauche est $\frac{1}{2}$

Comme $-1 \neq \frac{1}{2}$ alors U n'est pas dérivable en $\frac{1}{2}$.

(c) En $+\infty$ on peut trouver l'asymptote en effectuant un développement limité après factorisation :

$$\begin{aligned} U(x) &= -2 + \sqrt{4 + (1+x)^2} \\ &= -2 + \sqrt{x^2 + 2x + 5} \\ &= -2 + \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)} \end{aligned}$$

4

On a $\sqrt{x^2} = |x| = x$

et comme $\sqrt{1+X} = 1 + \frac{1}{2}X + X\varepsilon(X)$ quand $X \rightarrow 0$, avec $X = 2/x + 5/x^2$ on a :

$$\begin{aligned}\sqrt{1+2/x+5/x^2} &= 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right) + \left(\frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}\right)\varepsilon(X) \\ &= 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon_1(x)\end{aligned}$$

avec $\varepsilon_1(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}U(x) &= -2 + x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\varepsilon_1(x)\right) \\ &= x - 1 + \varepsilon_1(x)\end{aligned}$$

Conclusion : la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe représentative de U en $+\infty$

N.B. Comme l'asymptote était donné, on pouvait plus simplement déterminer la limite de la différence :

$$\begin{aligned}U(x) - (x - 1) &= -2 + \sqrt{4 + (1+x)^2} - (x - 1) \\ &= \sqrt{4 + (1+x)^2} - (x + 1) \text{ conjuguée :} \\ &= \frac{\sqrt{4 + (1+x)^2}^2 - (x + 1)^2}{\sqrt{4 + (1+x)^2} + (x + 1)} \\ &= \frac{4}{\sqrt{4 + (1+x)^2} + (x + 1)} \rightarrow 0\end{aligned}$$

(d) Pour tracer la courbe représentative de U , il faut placer l'asymptote en $+\infty$, les deux demi tangentes en $\frac{1}{2}$.

Comme $U\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, il faut bien placer le point sur la droite d'équation $y = x$... ce qui est très utile à la suite.

7. On considère la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} a_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = U(a_n) \end{cases}$

(a) Par récurrence :

— $a_0 = 1 \geq \frac{1}{2}$

— Soit $n \geq 0$ tel que $a_n \geq \frac{1}{2}$

comme U est croissante sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et que a_n et $\frac{1}{2}$ en sont éléments alors

$$a_{n+1} = U(a_n) \geq U\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \geq \frac{1}{2}$.

(b) On étudie le signe de $U(x) - x$ pour $x \geq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned}U(x) - x &= \sqrt{4 + (1+x)^2} - (2+x) \text{ (quantités conjuguées)} \\ &= \frac{\sqrt{4 + (1+x)^2}^2 - (2+x)^2}{\sqrt{4 + (1+x)^2} + (2+x)} \\ &= \frac{4 + (1+2x+x^2) - (4+4x+x^2)}{\sqrt{4 + (1+x)^2} + (2+x)} \\ &= \frac{1-2x}{\sqrt{4 + (1+x)^2} + (2+x)} \leq 0\end{aligned}$$

Donc, comme $a_n \geq \frac{1}{2}$ on a $U(a_n) \leq a_n$

Conclusion : $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

(c) La suite est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$ donc elle converge vers une limite $\ell \geq \frac{1}{2}$

Comme U est continue sur $[0, +\infty[$ elle est continue en ℓ .

Donc $U(\ell) = \ell$.

cette équation n'a pas de solution sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ où $U(x) = 1 - x$

Et sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $U(x) - x$ est du signe de $1 - 2x$

Donc $U(x) = x \iff x = \frac{1}{2}$

Conclusion : $a_n \rightarrow \frac{1}{2}$ quand $n \rightarrow +\infty$