DM n°1

On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{(n+3)u_n + 1} \text{ avec } u_0 = \frac{1}{4}.$$

1. Déterminer u_1 et u_2 sous forme d'une fraction irréductible.
2. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie et à termes strictement positifs.
3. On pose, pour tout entier naturel n,
$$v_n = \frac{1}{u_n}.$$
Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n (et de n).
4. On pose, pour tout entier naturel n,
$$w_n = v_n - n - 1$$
Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
5. En déduire l'expression explicite de u_n en fonction de n.
6. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Déterminer une expression simplifiée de la somme
$$\sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Exercice facultatif.

Soit f définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ \ln(1+x).$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. (a) Calculer pour tout $x \in [0,+\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) En déduire que f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
2. Déterminer le signe de $f(x) - x$ selon la valeur de x.
3. Tracer la courbe représentative de f
4. On suppose dans cette question que $u_0 \in]e-1,+\infty[$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_n \leq u_{n+1}.$$
   (b) En déduire que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 ou $e-1$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. On suppose dans cette question que $u_0 \in]0, e-1[$
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$0 < u_n < e-1.$$
   (b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante puis sa limite.