DM n°2

Le but de l'exercice est d'étudier la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : pour tout n entier $n \geq 2$,

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

1. (a) Montrer que pour tout entier k tel que $k \geq 2$:

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}.$$

(b) Pour $n \geq 2$, montrer que

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \leq 1.$$

2. (a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$S_n \leq 1.$$

(b) Montrer que pour tout $n \geq 2$,

$$S_n \leq S_{n+1}.$$

(c) Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie (que l'on notera L).

Pour pour tout entier $m \geq 2$, on note

$$R_m = L - S_m = \lim_{n \longrightarrow +\infty} (S_n - S_m).$$

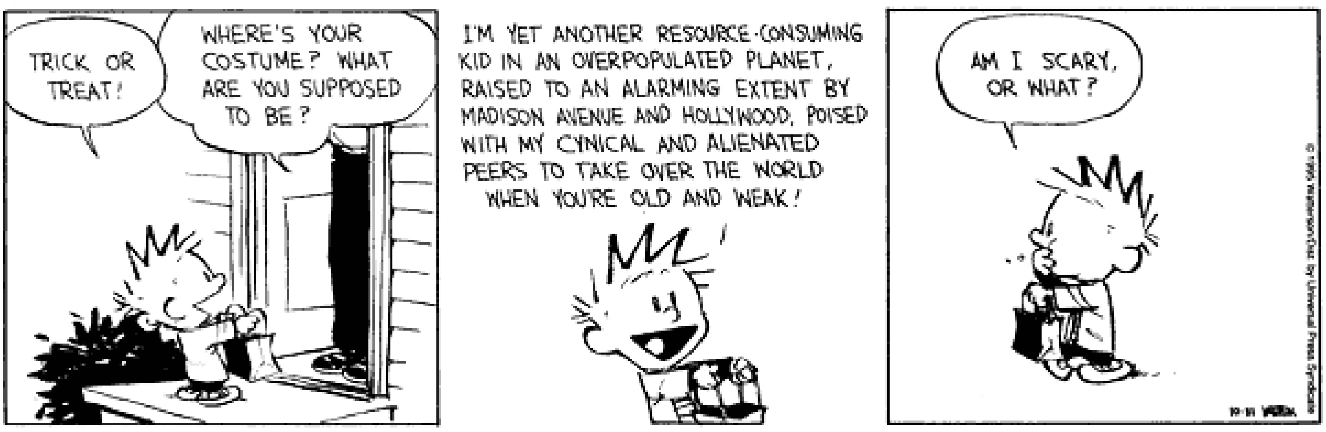
3. (a) Montrer que pour tout entier m et $n \geq m \geq 1$:

$$\frac{1}{m+1} - \frac{1}{n+1} \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{m}$$

(b) En déduire que pour tout entier $m \geq 1$:

$$\frac{1}{m+1} \leq R_m \leq \frac{1}{m}$$

4. Déterminer la plus petite valeur de m telle que $L - S_m \leq 10^{-2}$



Exercice facultatif.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = e^{u_n} - 1.$$

On pose la fonction f définie par

$$f(x) = e^x - 1.$$

1. Déterminer le signe de $f(x) - x$ afin de montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution qui est 0.
2. On suppose que $u_0 = 1$.
   (a) Montrer que pour tout entier n,
   $$1 \leq u_n \leq u_{n+1}.$$
   (b) Montrer que (u_n) n'est pas majorée et en déduire sa limite.
   (c) Monter que si $x \geq 1$ alors
   $$f(x) \geq (e-1)\,x.$$
   (d) En déduire que pour tout entier n,
   $$u_n \geq (e-1)^n$$
   Retrouver la limite de la suite (u_n).
3. On suppose ici que $u_0 < 0$.
   (a) Montrer que pour tout entier n,
   $$u_n < 0$$
   (b) En déduire que (u_n) est croissante puis qu'elle converge vers 0.