

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} + 1}.$$

1. (a) Montrer que f est paire.
- (b) Etudier les variations de f et tracer sa courbe.
- (c) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$.
- (d) Justifier que $0 \leq \ell \leq \frac{1}{2}$. On donne $f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{2}$.
- (e) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$|f'(x)| \leq f(x) \leq \frac{1}{2}.$$

2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$$

- (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq u_n \leq \frac{1}{2}.$$

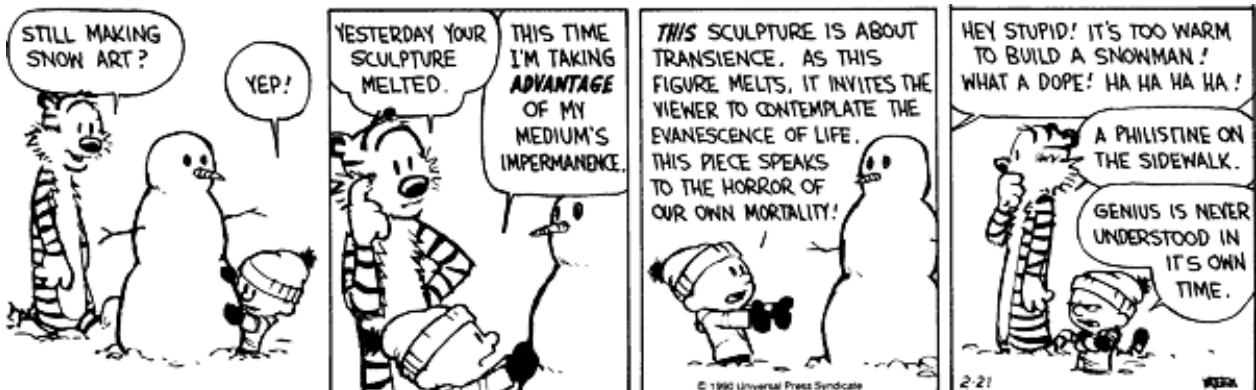
- (b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{1}{2} |u_n - \ell|.$$

- (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2^{n+1}}.$$

- (d) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ .
- (e) Ecrire un programme en Python permettant d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.



Exercice facultatif.

On considère l'application φ défini sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{cases} \varphi(x) = 1 - x^2 \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \varphi(0) = 1 \end{cases}$$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
Interpréter graphiquement cette limite.
2. Prouver que φ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa fonction dérivée.
4. Montrer que φ est dérivable en 0. Donner l'allure de la représentation graphique de φ au voisinage du point d'abscisse 0.
5. Dresser le tableau de variations de φ .
6. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$. Montrer l'existence d'un unique réel α tel que $\varphi(\alpha) = 0$ et justifier que

$$\sqrt{2} < \alpha < 2.$$

7. On considère les deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par : $a_0 = \sqrt{2}$ et $b_0 = 2$.

$$\forall n \geq 0, \quad \text{si } \varphi(a_n) \varphi\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \quad \text{alors} \quad a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

$$\forall n \geq 0, \quad \text{si } \varphi(a_n) \varphi\left(\frac{a_n + b_n}{2}\right) \geq 0 \quad \text{alors} \quad a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n$$

Écrire un programme en Python calculant a_7 et b_7 .