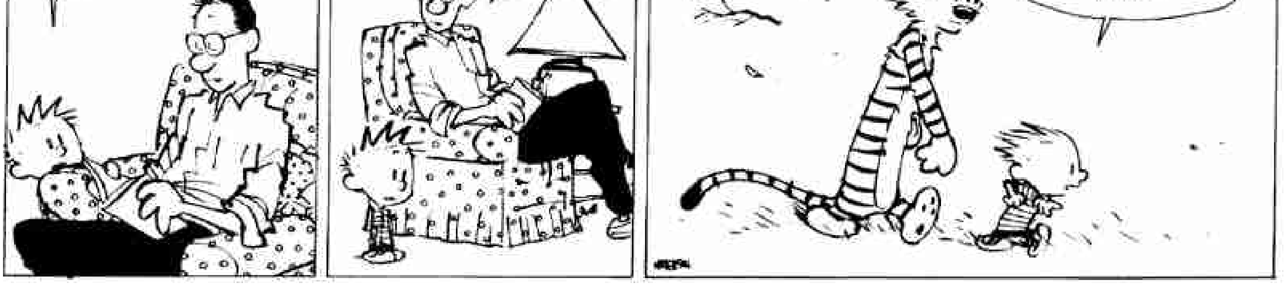
DM n°5

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles d'ordre trois et on considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et A^3, puis vérifier :
$$A^3 = A^2 + 2A.$$
2. Montrer que la famille (A, A^2) est libre dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, il existe un unique couple (a_n, b_n) de nombres réels tel que :
$$A^n = a_n A + b_n A^2,$$
et exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
4. Écrire un programme en *Python* qui calcule et affiche a_n et b_n pour un entier n donné supérieur ou égal à 1.
5. (a) Montrer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1 :
$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n$$
   (b) En déduire a_n et b_n en fonction de n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.
   (c) Donner l'expression de A^n en fonction de A, A^2 et n, pour tout entier n supérieur ou égal à 1.



Exercice facultatif.

1. Montrer que l'intégrale $\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$ est définie pour tout réel x.

   On considère désormais la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{t^2+1}} dt$$

2. Etablir que f est impaire.
3. (a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer $f'(x)$, pour tout réel x, et en déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. (a) En utilisant la relation $t^2 \leqslant t^2+1 \leqslant t^2+2t+1$, valable pour tout t réel positif ou nul, montrer que l'on a l'encadrement suivant :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln(2x+1) - \ln(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \ln(2)$$
   (b) Donner alors la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   (c) Dresser le tableau de variation complet de f.
   (d) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
5. (a) Montrer que pour tout réel x, on a : $x + \sqrt{x^2+1} > 0$.
   (b) Déterminer la dérivée de la fonction h qui, à tout réel x associe $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$.
   (c) En déduire l'expression explicite de $f(x)$.
6. Recherche d'un équivalent de $f(x)$ lorsque x est au voisinage de 0.
   (a) Etablir que, pour tout réel x strictement positif, on a :
$$x - f(x) = \int_x^{2x} \frac{t^2}{\sqrt{t^2+1}\left(1+\sqrt{t^2+1}\right)} dt.$$
   (b) En déduire :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 0 \leqslant x - f(x) \leqslant \frac{7}{6}x^3$$
   (c) Conclure que
$$\frac{f(x)}{x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 1.$$
   (d) Montrer que l'on a aussi :
$$\frac{f(x)}{x} \underset{x \to 0^-}{\longrightarrow} 1.$$