DM n°6

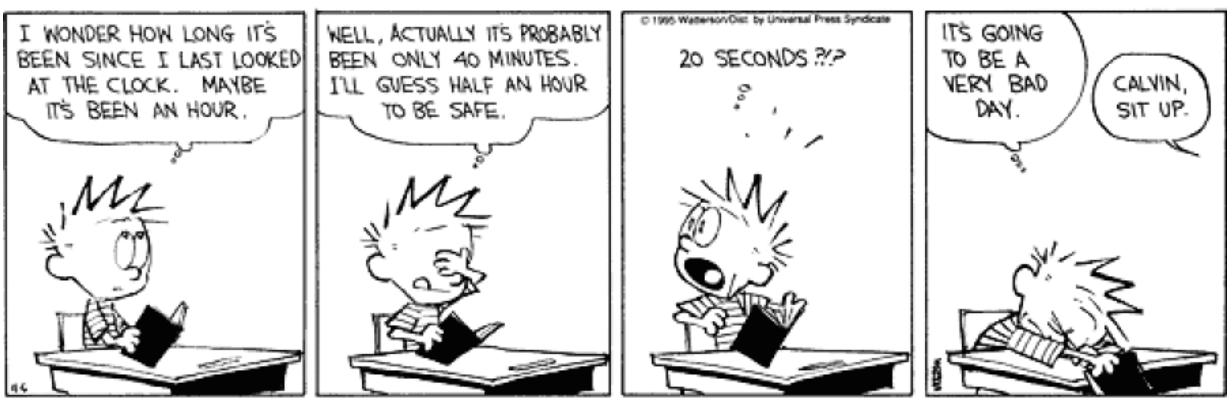
On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1, \\ \dfrac{x+1}{x-1}\dfrac{\ln(x)}{2} & \text{si } x \neq 1. \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction continue sur $]0,+\infty[$.
2. Calculer la dérivée f' de f sur les intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$. En déduire que f est monotone sur chacun de ces deux intervalles.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on a

$$f'(x) = \frac{(x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2} - \frac{1}{2x}$$

4. (a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $t \mapsto \ln(1+t)$.
   (b) En déduire que f est dérivable au point 1 et déterminer $f'(1)$.
   (c) Montrer que f est de classe C^1 sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
5. (a) Montrer que pour tout $x > 1$, on a
$$\ln(x) < (x-1).$$
   (b) En déduire que pour tout $x > 1$, on a
$$f(x) < x.$$
6. Représenter soigneusement la courbe représentative de la fonction f.
7. Soit a un réel supérieur à 1.
   (a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de réels vérifiant $x_0 = a$ et pour tout entier $n \geq 0$,
$$x_{n+1} = f(x_n).$$
   (b) Montrer que cette suite est décroissante et qu'elle admet une limite l que l'on précisera.
8. On se propose d'étudier la vitesse avec laquelle la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ tend vers l.
   (a) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall x \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[$,
$$|f'(x)| \leq \frac{1}{3}.$$
   Puis, montrer qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, on a
$$x_n \in]l-\varepsilon, l+\varepsilon[.$$
   (b) En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on a
$$|f(x_n) - l| \leq \frac{1}{3}|x_n - l|.$$
   (c) Montrer que
$$x_n - l \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{2^n}\right).$$



Exercice facultatif.

On considère, pour tout entier naturel n, l'application φ_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_n(x) = (1-x)^n e^{-2x}$$

ainsi que l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \varphi_n(x)\, dx$$

On se propose de démontrer l'existence de trois réels, a, b, c tels que :

$$I_n \underset{+\infty}{=} a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

1. Calculer I_0, I_1.
2. Etudier la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer le signe de I_n pour tout entier naturel n. Que peut-on en déduire pour la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Montrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$$
En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers l'infini.
5. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 2I_{n+1} = 1 - (n+1)\, I_n$$
6. En déduire la limite de la suite $(n\, I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Déterminer la limite de la suite $(n\,(n\, I_n - 1))_{n\in\mathbb{N}}$.
8. Déterminer les valeurs de a, b et c.