

Pour tout entier naturel n , on pose

$$u_n = \prod_{k=0}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right) = (1+1) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

1. Donner, sous forme d'entiers ou de fractions simplifiées, les valeurs de u_0, u_1 et u_2 .

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n \geq 2.$$

(b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n puis en déduire les variations de la suite (u_n) .

(c) Établir que, pour tout réel x strictement supérieur à -1 , on a :

$$\ln(1+x) \leq x.$$

(d) En déduire, pour tout entier naturel n , un majorant de $\ln(u_n)$.

Précision : ce majorant doit être indépendant de n .

3. En utilisant les questions précédentes, montrer que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ , élément de $[2, e^2]$.

4. On se propose dans cette question de déterminer la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.

(a) Justifier que la suite $(\ln(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et que l'on a :

$$\ln(\ell) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

(b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a

$$\ln \left(\frac{\ell}{u_n}\right) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{2^k}\right).$$

(c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq \ln \left(\frac{\ell}{u_n}\right) \leq \frac{1}{2^n}.$$

(d) Déduire de la question précédente que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \ell - u_n \leq \ell \left(1 - e^{-\frac{1}{2^n}}\right).$$

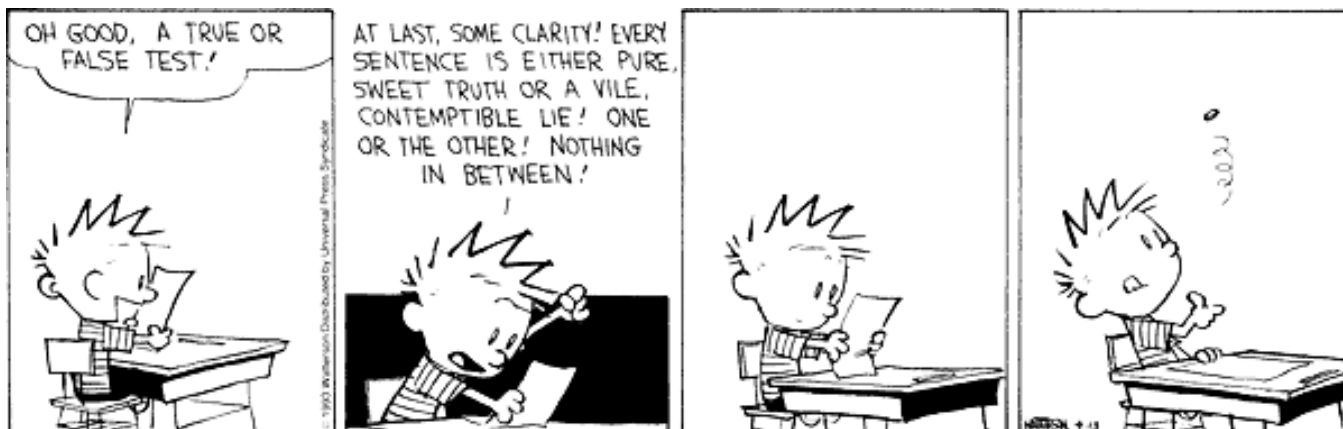
(e) Justifier que, pour tout réel x , on a

$$1 - e^{-x} \leq x.$$

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \ell - u_n \leq \frac{\ell}{2^n}.$$

Conclure quant à la nature de la série de terme général $(\ell - u_n)$.



Exercice facultatif.

Dans cet exercice, on considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et la relation pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

1. (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'entiers naturels.
- (b) La suite est-elle convergente ?

Dans toute la suite de l'exercice, a et b ($a > b$) désignent les deux solutions de l'équation du second degré suivante :

$$x^2 - x - 1 = 0$$

2. (a) Montrer que :

$$b = 1 - a = -\frac{1}{a}.$$

Établir l'encadrement suivant $1 < a < 2$.

- (b) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n).$$

- (c) En déduire un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$

3. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\beta_n = u_{n+1} - au_n.$$

Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}$, β_n en fonction de n et b .

4. On rappelle que pour tout réel x , la partie entière de x est l'entier noté $\lfloor x \rfloor$ qui vérifie :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

- (a) Établir, pour tout n de $\mathbb{N}$, l'égalité suivante :

$$\lfloor au_{2n} \rfloor = u_{2n+1} - 1.$$

- (b) Exprimer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ $\lfloor au_{2n-1} \rfloor$, en fonction de u_{2n} .

5. Soit y un réel fixé vérifiant $|y| < 1$ et k un entier fixé de $\mathbb{N}$.

- (a) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} n^k y^n$ est absolument convergente.

- (b) En déduire la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} n^k \frac{u_n}{2^{n+1}}$.

- (c) En utilisant la définition de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u_n}{2^{n+1}}.$$