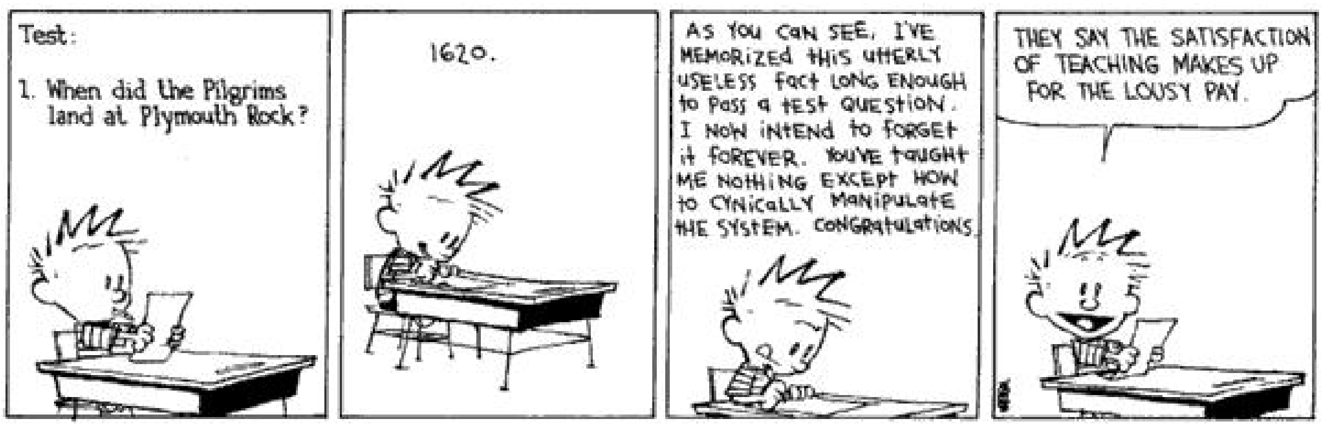
DM n°8

Soit la matrice $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On note E l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $MK = KM = M$.

1. (a) Montrer que E est un espace vectoriel.
   (b) Montrer par l'absurde qu'aucune matrice de E n'est inversible.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{pmatrix}$ une matrice de E.
   (a) Montrer que $k = g = c = a$, $h = b$ et $f = d$, puis en déduire la forme des matrices de E.
   (b) Déterminer une base de E et vérifier que $\dim(E) = 4$.
3. On considère l'ensemble F des matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ où x, y et z sont des réels.
   Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de E et donner une base de F.
4. On note φ l'application de F dans $\mathbb{R}$ qui à toute matrice A de F associe le nombre :
   $$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}(-1)^{i+j}a_{i,j},$$
   où $a_{i,j}$ désigne l'élément de la matrice A situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ième}$ colonne.
   (a) Montrer que φ est une forme linéaire sur F dans $\mathbb{R}$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Im}(\varphi)$.
   (c) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
   (d) Soit $M = \begin{pmatrix} x & y & x \\ y & z & y \\ x & y & x \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. Exprimer $\varphi(M)$ en fonction de x, y et z
   (e) En déduire une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.



Exercice facultatif.

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Partie 1 : Calcul matriciel

1. Déterminer si la matrice P est inversible.
2. Calculer P^{-1} et vérifier que $A = P\ D\ P^{-1}$.
3. Calculer la matrice $C = P^{-1}B\ P$ et vérifier que C est diagonale.

Partie 2 : Étude d'un endomorphisme d'un espace de matrices

On note E l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre trois, et on considère l'application $f : E \to E$ qui, à toute matrice M carrée d'ordre trois, associe $f(M) = AM - MB$.

1. Donner la dimension de E.
2. Vérifier que f est un endomorphisme de E.
3. Soit $M \in E$, on note $N = P^{-1}M\ P$.
   (a) Montrer : $M \in \operatorname{Ker}(f) \Leftrightarrow DN = NC$.
   (b) Déterminer les matrices N carrées d'ordre trois telles que : $DN = NC$.
   (c) Montrer que l'ensemble des matrices N carrées d'ordre trois telles que $DN = NC$ est un espace vectoriel, et en déterminer une base et la dimension.
4. (a) En déduire la dimension de $\operatorname{Ker}(f)$.
   (b) Donner au moins un élément non nul de $\operatorname{Ker}(f)$ et donner au moins un élément non nul de $\operatorname{Im}(f)$.