

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}.$$

- (a) Étudier les variations de la fonction g_0 , définie sur $[0, +\infty[$ par : $g_0(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$.

Préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de g_0 .

- (b) Pour $n \geq 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que :

$$\forall x \in [0, +\infty[, \quad g'_n(x) \geq 0 \iff n \geq 2 \ln(1+x).$$

En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geq 1$.

Calculer soigneusement $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x)$.

- (c) Montrer que, pour $n \geq 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut :

$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$

et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n$.

- (d) Montrer enfin que pour tout $n \geq 1$:

$$g_n(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t) dt.$$

- (a) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.
 (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'intégrale I_n est convergente.
 (c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = (n+1)I_n$$

- (d) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = n!.$$

1. Write a paragraph explaining the significance of Magellan's expedition.



A GAS MASK, A SMOKE GRENADE,
AND A HELICOPTER THAT'S
ALL I ASK.



Exercice facultatif.

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0, \\ \frac{1}{(1+t)^2} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

1. Tracer l'allure de la courbe représentative de f .
2. Montrer que, pour tout réel x , l'intégrale $\int_{-\infty}^x f(t)dt$ converge, et calculer cette intégrale.

Indication : on distinguera les cas $x \leq 0$ et $x > 0$.

3. Déterminer un réel positif α tel que

$$\int_0^\alpha f(t)dt = \frac{1}{2}.$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+$ fixé. On considère la fonction φ_x définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \varphi_x(u) = \int_{x-u}^{x+u} f(t)dt.$$

- (a) Calculer $\varphi_x(0)$ et $\lim_{u \rightarrow +\infty} \varphi_x(u)$.
- (b) Montrer que pour $(u, v) \in \mathbb{R}_+^2$, si $u < v$ alors

$$\varphi_x(v) - \varphi_x(u) \geq \int_{x+u}^{x+v} f(t)dt.$$

En déduire que φ_x est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

- (c) On admet que φ_x est continue sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que l'équation $\varphi_x(u) = \frac{1}{2}$, d'inconnue u , admet une solution et une seule dans $\mathbb{R}_+$.

On note $U : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ l'application qui, à tout réel $x \in \mathbb{R}_+$, associe $U(x)$ l'unique solution de l'équation

$$\varphi_x(u) = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\int_{x-U(x)}^{x+U(x)} f(t)dt = \frac{1}{2}.$$

5. (a) Vérifier, pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$: $U(x) = 1 - x$.
- (b) Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$, montrer : $\varphi_x(x) \geq \frac{1}{2}$, puis : $x - U(x) \geq 0$, et en déduire :

$$U(x) = \sqrt{4 + (x+1)^2} - 2.$$

6. (a) Montrer que l'application U est continue sur $[0, +\infty[$.
 - (b) Etudier la dérivabilité de U sur $[0, +\infty[$.
 - (c) Montrer que la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe représentative de U .
 - (d) Tracer l'allure de la courbe représentative de U .
7. On considère la suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = U(a_n).$$

- (a) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n \geq \frac{1}{2}$.
- (b) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.
- (c) En déduire que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et montrer que sa limite est égale à $\frac{1}{2}$.