Corrigé du Devoir de rentrée

Compléter les ……. et les blancs laissés sur la feuille (aucune justification n'est demandée)

1) Calculs

$(10^3)^4 \times 0,001 = 10^{3\times 4-3} = 10^9$

$\dfrac{2^a \times 9^b}{8^c \times 6^d} = 2^{a-3c-d} \times 3^{2b-d}$

$3^n + 3^n + 3^n = 3\times 3^n = 3^{n+1}$

$\dfrac{36}{2\sqrt{2}} = \dfrac{18}{\sqrt{2}} = 9\sqrt{2}$

$\sqrt{169} + \sqrt{48} - \sqrt{12} = 13 + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 13 + 2\sqrt{3}$

$\dfrac{10}{25} + \dfrac{42}{30} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{7}{5} = \dfrac{9}{5}$ (fraction irréductible)

$\left(\dfrac{2x+7}{4x-2} - \dfrac{x+3}{2x-1}\right) \div \dfrac{x}{6x-3} = \dfrac{1}{2(2x-1)} \div \dfrac{x}{3(2x-1)} = \dfrac{3}{2x}$

$\ln\left(\dfrac{a^3}{b^2}\right) = 3\ln(a) - 2\ln(b)$

$x \in [3;15] \Leftrightarrow |x-9| \le 6$

$\big||x+2|-3\big| = 1 \Leftrightarrow x = -4 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = -6 \text{ ou } x = 2$

2) Valeurs numériques

Valeurs exactes : $e^{5\ln 2} = 2^5 = 32$ $\quad \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ $\quad \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

$\dbinom{10}{9} = \dbinom{10}{1} = 10$ $\quad \dbinom{6}{2} = \dfrac{6\times 5}{2} = 15$ $\quad 8^0 = 1$

Valeurs approchées à 0,1 près : $e \approx 2,7$ $\quad \ln 2 \approx 0,7$ $\quad \sqrt{2} \approx 1,4$ $\quad \dfrac{13}{9} = 1 + \dfrac{4}{9} = 1,4444.... \approx 1,4$

3) Formules remarquables : $(a,b,x) \in \mathbb{R}^3$ $\quad (n,p) \in \mathbb{N}^2$

$(4-x)^2 = 16 - 8x + x^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$

Si $x \neq 1$, $1 + x + x^2 + ... + x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Si $x = 1$, $1 + x + x^2 + ... + x^n = n+1$

$\dbinom{n+1}{p+1} = \dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1}$

4) Polynômes

$x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x < 2 \text{ ou } x > 3$

Factoriser : $2x^2 - 5x - 3 = 2\left(x + \dfrac{1}{2}\right)(x-3) = (2x+1)(x-3)$

Compléter : $\left(6x^3 - 10x^2 + 11x + 5\right) = (3x+1)\left(2x^2 - 4x + 5\right)$

5) Inégalités

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $a < b$ et $0 < c < d$

Entourer les affirmations forcément exactes et barrer les affirmations potentiellement fausses

$\cancel{a-c<b-d}$ $\quad \boxed{a^3 < b^3}$ $\quad \boxed{\ln c < \ln d}$ $\quad \cancel{\dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}}$ $\quad \cancel{\cos c < \cos d}$ $\quad \cancel{ac < bd}$

6) Système

Le système a pour solution x=3 , y=1 et z=2

$$\begin{cases} 2x+y+3z=13 \\ x-2y+4z=9 \\ 4x+5y-3z=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ L_1-2L_2 \\ L_3-2L_1 \end{matrix} \begin{cases} 2x+y+3z=13 \\ 5y-5z=-5 \\ 3y-9z=-15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ L_2/5 \\ L_3/3 \end{matrix} \begin{cases} 2x+y+3z=13 \\ y-z=-1 \\ y-3z=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \\ L_2-L_3 \end{matrix} \begin{cases} 2x+y+3z=13 \\ y-z=-1 \\ 2z=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6/2=3 \\ y=-1+2=1 \\ z=2 \end{cases}$$

7) Dénombrement/Probabilités

a) Dans une classe de 38 élèves, 20 étudient l'allemand et 12 étudient l'espagnol dont 5 qui font de l'allemand et de l'espagnol. Combien d'élèves n'étudient ni l'allemand ni l'espagnol ? 38 – (20 + 12 – 5) = 11

b) On lance 3 fois de suite un dé à 6 faces non truqué. Calculer la probabilité d'obtenir :

3 fois le n°6 : $\frac{1}{6}.\frac{1}{6}.\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$ Au moins une fois un 6 : $1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}$ exactement une fois n°6 : $3.\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{75}{216}$

c) On tire successivement et sans remise 2 cartes dans un jeu de 32 cartes.

i) La probabilité de tirer 2 piques est $\frac{8}{32}\times\frac{7}{31}=\frac{1}{4}\times\frac{7}{31}=\frac{7}{124}$

ii) Sachant que la première carte est le roi de trèfle, la probabilité de tirer 2 cartes noires est $\frac{15}{31}$

8) Variables aléatoires

a) La loi de probabilité d'une variable aléatoire X est donnée par le tableau ci-contre

x_i	0	2	3	4	6
$P(X=x_i)$	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1

Compléter le tableau et calculer E(X) = $0,1\times 0+0,3\times 2+0,2\times 3+0,3\times 4+0,1\times 6=3$

$V(X)=0,1\times 0^2+0,3\times 2^2+0,2\times 3^2+0,3\times 4^2+0,1\times 6^2-3^2=11,4-9=2,4$

Calculer $P_{X<4}(X=2)=\frac{0,3}{0,6}=\frac{1}{2}=0,5$ et $P_{X\geq 2}(X<5)=\frac{0,8}{0,9}=\frac{8}{9}$

b) On lance 80 fois de suite dans des conditions identiques une pièce non truquée. On note Y le nombre de piles obtenus. La loi de Y est la loi binomiale de paramètres n = 80 et p = 0,5

$P(Y=10)=\binom{80}{10}0,5^{10}0,5^{70}=\binom{80}{10}0,5^{80}$ $E(Y)=80\times 0,5=40$ $\sigma(Y)=\sqrt{80\times 0,5\times 0,5}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

9) Suites

a) Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison 2 telle que $u_4=3$ alors $u_{11}=3\times 2^7=3\times 128=384$

b) Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une suite arithmétique t.q. $v_2=12$ et $v_7=19$. La raison de la suite est $\frac{7}{5}=1,4$ et $v_0=12-2\times 1,4=9,2$

c) Soit $(g_n)_{n\geq 0}$ une suite géométrique de raison $q\in\mathbb{R}$. Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n=0 \Leftrightarrow q\in\left]-1;1\right[$

d) Barrer les affirmations fausses et entourer les affirmations exactes :

~~Si $(u_n)_{n\geq 0}$ n'est pas majorée, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$~~

Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante et majorée, alors elle converge

Si $(u_n)_{n\geq 0}$ est monotone alors elle a une limite (finie ou infinie)

Si ~~$(u_n)_{n\geq 0}$ est positive et décroissante alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$~~

10) Récurrence : On définit une suite par $u_0=3$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+2n+2$. Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=n^2+n+3$

<u>Initialisation</u> : si n=0 $u_0=3$ et $0^2+0+3=3$. Le résultat est donc vrai au rang 0

<u>Hérédité</u> : Supposons que le résultat soit vrai pour un entier $n\in\mathbb{N}$ donné. On a donc $u_n=n^2+n+3$.

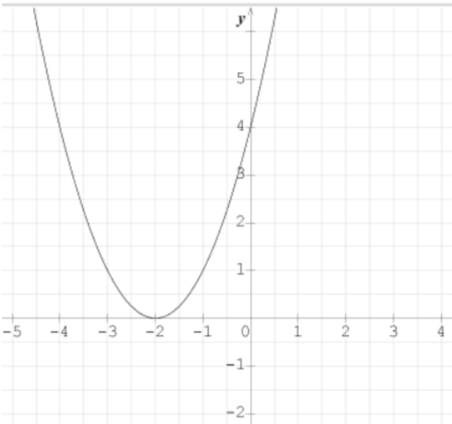
Alors $u_{n+1}=u_n+2n+2=n^2+n+3+2n+2=n^2+3n+5$

et $(n+1)^2+(n+1)+3=n^2+2n+1+n+1+3=n^2+3n+5=u_{n+1}$ donc le résultat est encore vrai au rang n+1

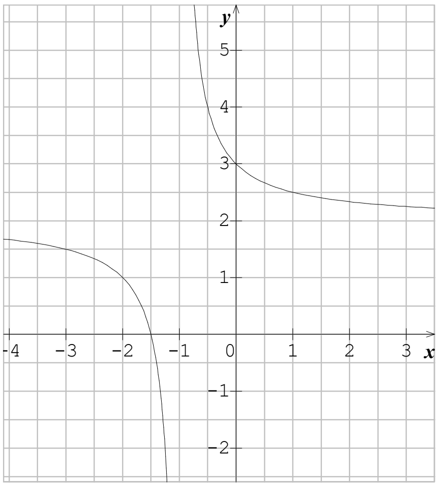
<u>Conclusion</u> : La proposition est vraie au rang 0 et héréditaire donc elle est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$ (principe de récurrence)

11) Représentation graphiques : Donner l'allure des représentations graphiques des fonctions suivantes

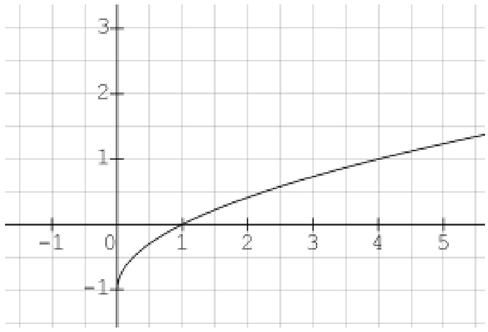
$a : x \mapsto (x+2)^2$



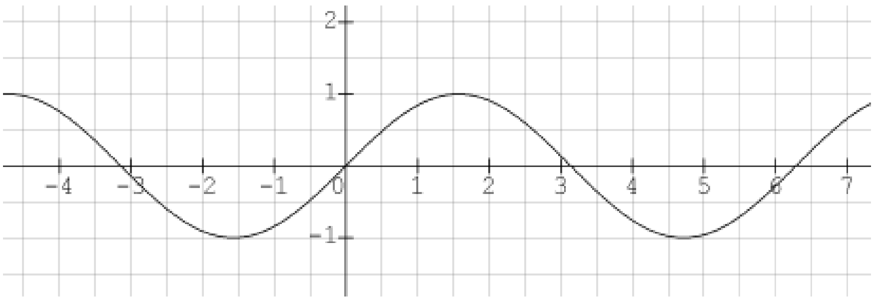
$b : x \mapsto \dfrac{1}{x+1} + 2$



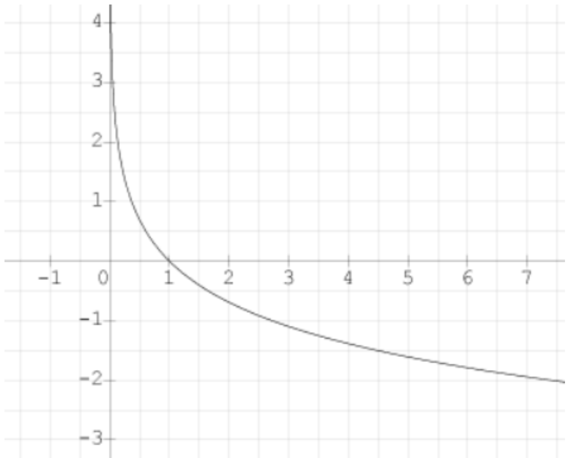
$c : x \mapsto \sqrt{x} - 1$



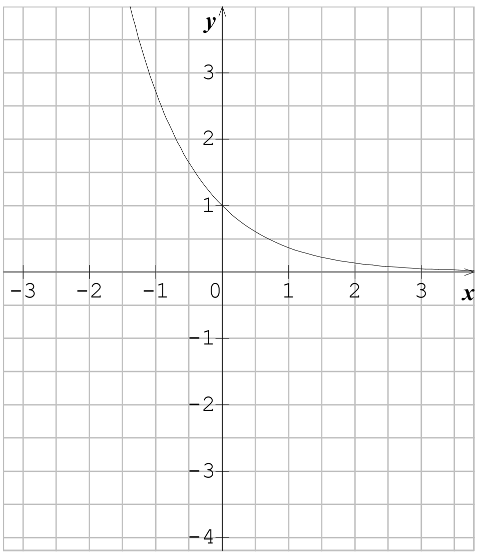
$d : x \mapsto \sin x$



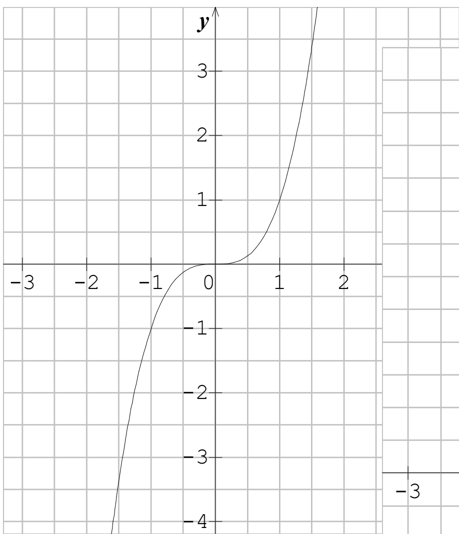
$e : x \mapsto -\ln x$

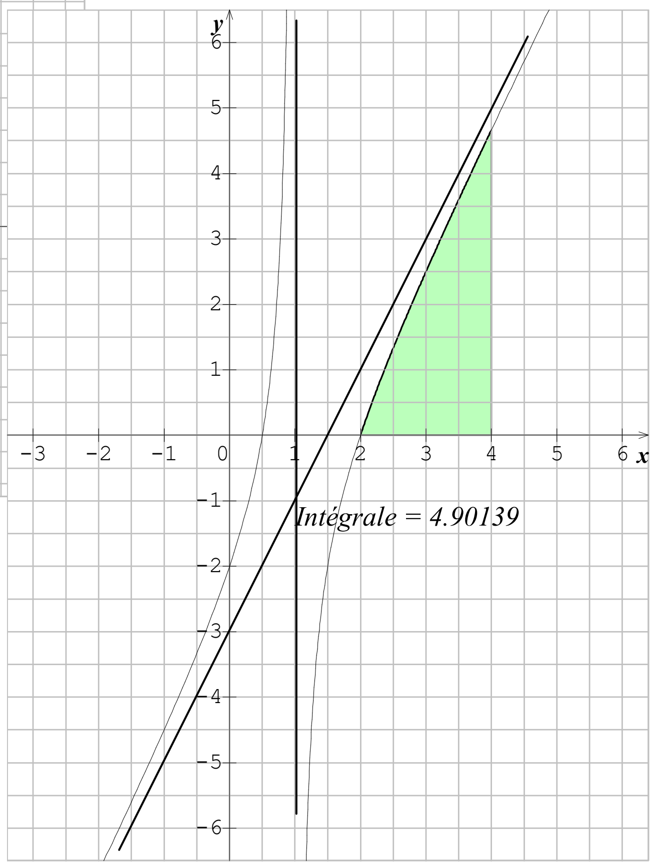


$g : x \to e^{-x}$



$h : x \to x^3$





On donne ci-contre la représentation graphique d'une fonction *f*

L'ensemble de définition de *f* semble être D$_f$ = $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

Les deux asymptotes à la courbe représentative ont pour équations
x =1 et y = 2x – 3

Donner une valeur approchée $\displaystyle\int_2^4 f(x)dx \approx$ 5

12) Limites

$\lim_{x\to-\infty} 4e^x - 1 + \frac{3}{x} = 0 - 1 + 0 = -1$ $\lim_{x\to 0^+} e^x + 2\ln x - 4 = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x} - 2\right)\ln x = -\infty$ « -2 * (+∞) »

$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{e^x} = 0$ $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\sin x}}{\sqrt{x}} = 0$ car $e^{-1} \le e^{\sin x} \le e$ $\lim_{x\to 0^+} x^2 \ln x = 0$

$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2 - x + 4}{4x - 12} = \lim_{x\to-\infty} \frac{3x}{4} = -\infty$ $\lim_{x\to 3^+} \frac{3x^2 - x + 4}{4x - 12} = +\infty$ « $\frac{28}{0^+}$ » $\lim_{x\to+\infty} \frac{3 - e^{3x}}{2e^{3x} - 10} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-e^{3x}}{2e^{3x}} = -\frac{1}{2}$

13) Domaine de définition

$a(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ $D_a =]-2;2[$ $b(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+1}$ $D_b =]-3;-1[\cup]-1;+\infty[$

$c(x) = \ln\left|x^2 - 1\right|$ $D_c = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ $d(x) = \frac{3 + 4e^{2x}}{5e^{3x} - 2}$ $D_d = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\ln\left(\frac{2}{5}\right)\right\}$

14) Dérivées (pas besoin de rechercher l'ensemble de définition dans cette question).

$a(x) = x^2 e^{4x}$ $a'(x) = 2xe^{4x} + x^2 4e^{4x}$ $b(x) = \frac{\ln x}{x}$ $b'(x) = \frac{1/x \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$c(x) = \ln(4\sqrt{x} + 1)$ $c'(x) = \frac{4\frac{1}{2\sqrt{x}}}{4\sqrt{x} + 1} = \frac{2}{\sqrt{x}(4\sqrt{x} + 1)}$ $d(x) = e^{3x^2} + \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $d'(x) = 6xe^{3x^2} + \left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

15) Primitives

a) Déterminer une primitive sur $]0;+\infty[$ des fonctions définies par :

$f(x) = 3x^5 + e^{2x} + \frac{1}{x}$ $F(x) = \frac{3x^6}{6} + \frac{e^{2x}}{2} + \ln x$ $g(x) = \frac{2x + 3}{x^2 + 3x}$ $G(x) = \ln\left|x^2 + 3x\right| = \ln(x^2 + 3x)$

$h(x) = \frac{6x^2 + 4}{\left(x^3 + 2x + 1\right)^2}$ $H(x) = \frac{-2}{x^3 + 2x + 1}$

b) Calculer la valeur exacte des intégrales

$I = \int_1^2 2x^3 - \frac{3}{x^2}\,dx = \left[2\frac{x^4}{4} + \frac{3}{x}\right]_1^2 = 9{,}5 - 3{,}5 = 6$ $J = \int_1^3 \frac{3}{x+4}\,dx = \left[3\ln(x+4)\right]_1^3 = 3\ln 7 - 3\ln 5 = 3\ln\frac{7}{5}$

16) Définitions/Théorèmes

a) Enoncer la formule des probabilités totales :

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements qui forment une partition de l'univers Ω.

Pour tout événement B : $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_n)$

Plus précisément : $P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \dots + P(A_n)P_{A_n}(B)$

b) Donner la définition d'une fonction dérivable en un point et citer une fonction usuelle qui n'est pas dérivable en tout point de son ensemble de définition

La fonction *f* est dérivable en un point *a* si la limite $\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ existe et qu'elle est finie.

La fonction racine carré et la fonction valeur absolue sont définies en 0 mais ne sont pas dérivables en 0.

c) Donner la définition d'une fonction convexe et citer 2 fonctions usuelles convexes :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C_f sa courbe représentative.

Si, pour tous les points distincts A et B de C_f, le segment [AB] est au-dessus de C_f, alors f est convexe sur I.

Si f est 2 fois dérivable sur I, alors f est convexe sur I si et seulement si $f''(x) \ge 0$ pour tout $x \in I$

La fonction exponentielle et la fonction carré sont convexes sur $\mathbb{R}$.