Mathématiques
Devoir surveillé n°2
Octobre 2024

Durée de l'épreuve : 2h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

Résoudre les équations suivantes

$$(E_1) : \quad \frac{x}{x+1} + \frac{x+1}{x} = \frac{2x-2}{x+2}, \quad (E_2) : \quad \frac{e^x}{e^x-1} + \frac{e^x-1}{e^x} = \frac{2e^x+2}{e^x-2}$$

(pour l'équation (E_2), on utilisera le changement de variable $X = -e^x$ et on vérifiera soigneusement que l'on peut se ramener à l'équation (E_1))

Exercice 2.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 1 + \frac{2}{2u_n+1} \text{ avec } u_0 = 0.$$

On admet que $\forall n \geqslant 0, \quad u_n \geqslant 0$.

1. Questions préliminaires :
   (a) Déterminer tous les réels x tels que $x = 1 + \dfrac{2}{2x+1}$.
   (b) Soient a et b deux réels positifs tels que $b = 1 + \dfrac{2}{2a+1}$.
   Exprimer a en fonction de b.
2. Explicitation de u_n en fonction de n :
   On introduit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \frac{u_n - \frac{3}{2}}{u_n+1}.$$

   (a) Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} = \left(-\dfrac{1}{4}\right) w_n$
   (b) Déterminer l'expression de w_n en fonction de n.
   (c) En déduire celle de u_n en fonction de n.

Exercice 3.

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. On définit la fonction f par

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

2. On définit la fonction g par

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$$

3. On définit la fonction h par

$$\begin{array}{rcl} h : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$$

Exercice 4.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(n+3+u_n\right).$$

1. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - n - 1$ est une suite géométrique dont on donnera la raison.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
3. Exprimer d'une manière simple en fonction de l'entier naturel n la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Exercice 5.

Soit n un entier naturel. On se propose dans cet exercice de calculer la somme double

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} (j-i)\binom{j}{i}.$$

1. Soit $j \in \mathbb{N}$. Simplifier (en justifiant) l'écriture de $\displaystyle\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i}$.
2. Vérifier que pour tout couple $(i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $i \leq j$, on a l'identité

$$i\binom{j}{i} = j\binom{j-1}{i-1}.$$

3. Déduire des deux questions précédentes que $S_n = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} j2^{j-1}$.
4. Obtenir finalement une expression de S_n en fonction de n qui ne fait pas apparaître le symbole $\sum$.

   (*Indication* : on pourra considérer la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{j=0}^{n} x^j$ et la dériver.)