Mathématiques

Corrigé du DS n°2

Exercice 1.

(E_1) : les valeurs interdites sont $\{-2,-1,0\}$. D'autre part, en remarquant que le dénominateur commun aux trois fractions est $x(x+1)(x+2)$, on a

$$
\begin{aligned}
(E_1) \quad \Leftrightarrow \quad & \frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}-\frac{2x-2}{x+2}=0 \Leftrightarrow \frac{x^2(x+2)+(x+1)^2(x+2)-x(2x-2)(x+1)}{x(x+1)(x+2)}=0\\
\Leftrightarrow \quad & x^2(x+2)+(x+1)^2(x+2)-x(2x-2)(x+1)=0\\
\Leftrightarrow \quad & x^3+2x^2+(x^2+2x+1)(x+2)-(2x^2-2x)(x+1)=0\\
\Leftrightarrow \quad & x^3+2x^2+(x^3+2x^2+x+2x^2+4x+2)-(2x^3+2x^2-2x^2-2x)=0\\
\Leftrightarrow \quad & 6x^2+7x+2=0 \Leftrightarrow x\in\left\{-\frac{1}{2},-\frac{2}{3}\right\}
\end{aligned}
$$

Aucune valeur interdite étant solution, on en déduit que les seules solutions de (E_1) sont $-\frac{1}{2}$ et $-\frac{2}{3}$

(E_2) : les valeurs interdites sont $e^x=1 \Leftrightarrow x=0$ et $e^x=2\Leftrightarrow x=\ln 2$ (e^x ne s'annulant jamais sur $\mathbb{R}$). Comme l'énoncé nous le propose, on pose $X=-e^x$ donc

$$
\begin{aligned}
\frac{e^x}{e^x-1}+\frac{e^x-1}{e^x} &= \frac{2e^x+2}{e^x-2} \Leftrightarrow \frac{-X}{-X-1}+\frac{-X-1}{-X}=\frac{-2X+2}{-X-2}\\
&\Leftrightarrow \frac{X}{X+1}+\frac{X+1}{X}=\frac{2X-2}{X+2}
\end{aligned}
$$

Par conséquent, x est solution de (E_2) ssi $X=-e^x$ est solution de (E_1). Par conséquent, nous en déduisons que

$$
\left\{\begin{array}{c} X=-\frac{1}{2}\\ \text{ou}\\ X=-\frac{2}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} -e^x=-\frac{1}{2}\\ \text{ou}\\ -e^x=-\frac{2}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} e^x=\frac{1}{2}\\ \text{ou}\\ e^x=\frac{2}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x=-\ln(2)\\ \text{ou}\\ x=\ln\left(\frac{2}{3}\right)\end{array}\right.
$$

Aucune valeur interdite étant solution, on en déduit que les seules solutions de (E_2) sont $-\ln(2)$ et $\ln\left(\frac{2}{3}\right)$.

Exercice 2.

1. (a) L'équation admet une unique valeur interdite $x=-\frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
x &= 1+\frac{2}{2x+1} \Leftrightarrow x-1=\frac{2}{2x+1} \Leftrightarrow (2x+1)(x-1)=2\\
&\Leftrightarrow 2x^2-x-3=0 \Leftrightarrow x=-1 \text{ ou } x=\frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

Puisqu'aucune valeur interdite, les solutions de l'équation proposée sont $x=-1$ et $x=\frac{3}{2}$.

(b) On résoud, relativement à la variable a (b étant considéré comme constant) l'équation

$$
\begin{aligned}
b &= 1+\frac{2}{2a+1} \Leftrightarrow b-1=\frac{2}{(2a+1)} \Leftrightarrow (2a+1)(b-1)=2\\
&\Leftrightarrow 2a(b-1)+b-1=2 \Leftrightarrow 2a(b-1)=3-b \Leftrightarrow a=\frac{3-b}{2(b-1)}=\frac{3-b}{2b-2}
\end{aligned}
$$

2. (a)

$$
\begin{aligned}
w_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-\frac{3}{2}}{u_{n+1}+1}=\frac{1+\frac{2}{2u_n+1}-\frac{3}{2}}{1+\frac{2}{2u_n+1}+1}=\frac{\frac{4-(2u_n+1)}{2(2u_n+1)}}{\frac{4+2(2u_n+1)}{2u_n+1}}=\frac{1}{2}\times\frac{4-(2u_n+1)}{4+2(2u_n+1)}\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{3-2u_n}{4u_n+4}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{3-2u_n}{u_n+1}=-\frac{1}{4}\frac{u_n-\frac{3}{2}}{u_n+1}=-\frac{1}{4}w_n
\end{aligned}
$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \left(-\frac{1}{4}\right)^n w_0.$

(c) Puisque $u_0 = 0$, on a $w_0 = \dfrac{u_0 - \frac{3}{2}}{u_0 + 1} = -\dfrac{3}{2}$ et en remplaçant w_n par son expression en fonction de u_n, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{u_n - \frac{3}{2}}{u_n + 1} &= -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \Leftrightarrow u_n - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n (u_n + 1) \\
&\Leftrightarrow \quad u_n - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n u_n - \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n \\
&\Leftrightarrow \quad u_n\left[1 + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right] = \frac{3}{2}\left[1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n\right] \Leftrightarrow u = \frac{3}{2} \times \frac{1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^n}{1 + \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^n}
\end{aligned}$$

Exercice 3.

1. f n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent : en effet il n'existe pas de $n \in \mathbb{N}$ tel que $f(n) = 0$ (si ce n existait ce serait $n = -1$ qui n'est pas un élément de $\mathbb{N}$).
   Par contre f est injective : soit $(n, n') \in \mathbb{N}^2$ tel que $f(n) = f(n')$, alors $n + 1 = n' + 1$ donc $n = n'$.
   $\boxed{f \text{ est injective, non surjective et donc non bijective.}}$
2. soit $(n, n') \in \mathbb{N}^2$ tel que $g(n) = g(n')$, alors $n + 1 = n' + 1$ donc $n = n'$.
   De plus, g est surjective car chaque $m \in \mathbb{Z}$ admet un antécédent par g : en posant $n = m - 1 \in \mathbb{Z}$ on trouve bien $g(n) = m$.
   $\boxed{g \text{ est injective et surjective, donc bijective.}}$
3. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ tels que $h(x, y) = h(x', y')$. Alors $(x + y, x - y) = (x' + y', x' - y')$ donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} x + y &=& x' + y' \\ x - y &=& x' - y' \end{array}\right.$$

   En faisant la somme des lignes de ce système on trouve $2x = 2x'$ donc $x = x'$ et avec la différence on obtient $y = y'$. Donc les couples (x, y) et (x', y') sont égaux. Donc h est injective.
   Montrons que h est surjective en raisonnant par analyse-synthèse. Soit $(X, Y) \in \mathbb{R}^2$, cherchons lui un antécédent (x, y) par h. Un tel antécédent vérifie $h(x, y) = (X, Y)$, donc $(x + y, x - y) = (X, Y)$ ou encore :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x + y &=& X \\ x - y &=& Y \end{array}\right.$$

   Encore une fois on faisant la somme des lignes on obtient $x = \frac{X+Y}{2}$ et avec la différence $y = \frac{X-Y}{2}$, donc

$$(x, y) = \left(\frac{X + Y}{2}, \frac{X - Y}{2}\right)$$

   La partie analyse de notre raisonnement en finie passons à la synthèse : il suffit de vérifier que le couple (x, y) que l'on a obtenu est bien solution, on obtient alors que h est surjective.
   $\boxed{h \text{ est injective et surjective, donc bijective.}}$

Exercice 4.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}(n + 3 + u_n).$$

1. On a pour $n \in \mathbb{N}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) - 1 = \frac{1}{2}(n + 3 + u_n) - n - 2 = \frac{1}{2}(u_n - n - 1) = \frac{1}{2}v_n.$$

   (v_n) est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$. Ainsi pour $n \in \mathbb{N}$

$$v_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

2. On obtient alors
$$u_n = v_n + n + 1 = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + n + 1.$$

3. Par linéarité de la somme, et utilisation des sommes de termes consécutifs de suites géométriques (ou arithmétiques)
$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\left(3\left(\frac{1}{2}\right)^k + k + 1\right) = 3\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{n}(k+1) = 3\,\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$
On obtient donc
$$S_n = 6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Exercice 5.

1. En utilisant la formule du binôme de Newton, on a
$$\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} = \sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}1^i 1^{j-i} = (1+1)^j = 2^j.$$
2. On a $i\binom{j}{i} = i\dfrac{j!}{i!(j-i)!} = \dfrac{j(j-1)!}{(i-1)!(j-i)!} = j\binom{j-1}{i-1}$.
3. On a
$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{0\le i\le j\le n} j\binom{j}{i} - \sum_{0\le i\le j\le n} i\binom{j}{i} \\
&= \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} j\binom{j}{i} - \sum_{1\le i\le j\le n} j\binom{j-1}{i-1} && \text{(d'après 2.)}\\
&= \sum_{j=0}^{n} j\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} - \sum_{j=1}^{n} j\sum_{i=1}^{j}\binom{j-1}{i-1} \\
&= \sum_{j=0}^{n} j\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} - \sum_{j=1}^{n} j\sum_{i=0}^{j-1}\binom{j-1}{i} && \text{(translation d'indice dans la dernière somme)}\\
&= \sum_{j=0}^{n} j2^j - \sum_{j=0}^{n} j2^{j-1} && \text{(d'après 1.)}\\
&= \sum_{j=0}^{n} j(2^j - 2^{j-1}) \\
&= \sum_{j=0}^{n} j2^{j-1}.
\end{aligned}$$

4. La fonction $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{j=0}^{n} x^j$ est polynomiale, donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} jx^{j-1}$. Ainsi, nous avons $S_n = f'(2)$. Pour expliciter $f'(2)$, on va déterminer une seconde expression de $f'(x)$ au voisinage de 2.

   On observe que $f(x)$ est la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique de raison x et de premier terme égal à 1, d'où
$$\forall x \neq 1, \quad f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$
   En dérivant l'expression précédente, on obtient
$$\forall x \neq 1, \quad f'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(1-x)^2}.$$
   Il résulte $S_n = f'(2) = n.2^{n+1} - (n+1).2^n + 1 = (n-1).2^n + 1.$