Mathématiques
Devoir surveillé n°3
Novembre 2024

Durée de l'épreuve : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

Deux pièces (une chambre et une salle) A et B sont reliées entre elles de la façon suivante : A ouvre sur B et B ouvre sur l'extérieur. Une guêpe initialement (à l'instant 0) dans la pièce A voudrait sortir à l'air libre. A chaque instant $n \in \mathbb{N}$ son trajet obéit aux règles suivantes :

— Lorsqu'elle est dans la pièce A au temps n, alors au temps $n+1$ elle reste en A avec une probabilité de $1/3$ et elle passe dans la pièce B avec une probabilité de $2/3$.

— Lorsqu'elle est en B au temps n, alors au temps $n+1$ elle retourne en A avec une probabilité de $1/4$, elle reste en B avec une probabilité de $1/2$ et elle sort à l'air libre avec une probabilité de $1/4$.

— Enfin, lorsqu'elle est à l'air libre, elle ne revient plus.

Pour tout entier n, on notera les événements :
- A_n : "la guêpe est dans la pièce A à l'instant n "
- B_n : "la guêpe est dans la pièce B à l'instant n "
- D_n : "la guêpe est dehors à l'instant n "
- S_n : "la guêpe sort à l'instant n "

On notera a_n, b_n, d_n et s_n leurs probabilités respectives.

1. (a) Déterminer les probabilités a_0, b_0, s_0, a_1, b_1, s_1 et s_2.
   (b) Sachant qu'à l'instant 2 elle est en A, quelle est la probabilité qu'elle ait été en B à l'instant 1?
   (c) Justifier que pour tout entier n :
$$A_{n+1} = (A_n \cap A_{n+1}) \cup (B_n \cap A_{n+1}) \quad \text{et} \quad B_{n+1} = (A_n \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1}).$$
   (d) En déduire pour tout entier n, les relations de récurrence suivantes :
$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n.$$
2. (a) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$$b_n = 2a_n.$$
   (b) En déduire pour $n \geq 1$, l'expression de a_n et de b_n en fonction de n.
   (c) Calculer les limites de a_n et de b_n quand n tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.
3. (a) Justifier que pour tout entier $n \geq 2$,
$$s_n = \frac{1}{4}b_{n-1}.$$
   (b) En déduire s_n en fonction de n.
   (c) Déterminer la probabilité que la guêpe soit dehors à l'instant 10. (on ne cherchera pas à simplifier le résultat)

Exercice 2.

Un jeu vidéo comporte N niveaux de jeu : niveau 1, niveau 2, ... niveau N. On suppose que N est un entier au moins égal 3. Le jeu commence au niveau 1. Ensuite, il faut réussir un niveau pour passer au suivant et ainsi de suite jusqu'au dernier niveau. Le jeu s'arrête si l'on a échoue à l'un des niveaux ou si l'on a réussi tous les niveaux. On suppose que lorsqu'on parvient au niveau k ($k = 1, 2, ..., N$) la probabilité de réussir ce *kème* niveau est égale $1/k$.

On désigne par X_N la variable aléatoire égale au nombre de niveaux entièrement franchis au moment où le jeu s'arrête. Ainsi, pour $k = 1, 2, ..., N-1$, l'événement $(X_N = k)$ signifie que l'on a échoué au niveau $k+1$, et l'événement $(X_N = N)$ que l'on est vainqueur du jeu.

1. Démontrer que
$$\forall k \in [\![1, N-1]\!],\ P\left(X_N = k\right) = \frac{k}{(k+1)!} \text{ et que } P\left(X_N = N\right) = \frac{1}{N!}.$$

2. On pose
$$S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}.$$
En utilisant le théorème de transfert pour calculer $E\left(X_N + 1\right)$, montrer que
$$E\left(X_N\right) = S_N - 1.$$
En admettant que $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} = e$, en déduire
$$\lim_{N \to +\infty} E\left(X_N\right).$$

3. En utilisant le théorème de transfert, montrer que
$$E\big(\left(X_N + 1\right)\left(X_N - 1\right)\big) = S_{N-3} + \frac{(N+1)(N-1)}{N!}.$$

4. En déduire $V\left(X_N\right)$ en fonction de S_N, S_{N-3} et N. Montrer que
$$\lim_{N \to +\infty} V\left(X_N\right) = 3e - e^2.$$

Exercice 3.

Soient deux suites réels $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on définit la suite $u * v = w$ par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}$$

On dit que w est le **produit de convolution** de u et de v.

Partie I : Exemples

1. Premiers exemples

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

   (a) $u_n = 2$ et $v_n = 3$.

   (b) $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$.

   (c) $u_n = \frac{2^n}{n!}$ et $v_n = \frac{3^n}{n!}$.

2. Un résultat de convergence

   Dans cette question, la suite u est définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$
   et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

   (a) Établir, pour tout couple d'entiers naturels (n, m) vérifiant $n < m$, l'inégalité :
$$\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n.$$

(b) Soit $n \geq 2$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{2n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_n \leq 2v_n \quad \text{ et } \quad \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k\, v_{2n-k} \leq \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k\, v_1 \leq v_1\, u_n.$$

(c) En déduire l'inégalité :

$$w_{2n} \leqslant v_0\, u_{2n} + 2v_n + v_1\, u_n.$$

On suppose que l'on a obtenu également $w_{2n+1} \leqslant v_0\, u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1\, u_n$.

(d) En déduire que les deux suites $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0 ainsi que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(e) Soit u' la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u'_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

À l'aide de la question précédente, montrer que la suite $u' * v$ est convergente et converge vers 0.

Partie II : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. (a) Montrer que toute suite décroissante de réels positifs est élément de A.

   (b) Montrer que toute suite suite strictement croissante n'appartient pas à A.

2. Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = \frac{1}{2}(z_n + z_{n-1}).$$

   (a) Montrer qu'il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

   (b) En déduire qu'il existe au moins une suite non monotone appartenant à A.

3. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

   On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1}$.

   (a) Montrer que la suite c est décroissante à partir du rang 1 et qu'elle converge vers un nombre ℓ que l'on ne cherchera pas à calculer.

   (b) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité :

$$\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} = a_n.$$

   Que peut-on en déduire pour les suites $b * c$ et a ?

   (c) Soit ε la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = c_n - \ell$$

   On définit également

$$d = b * \varepsilon.$$

   En utilisant la question I.2.(e), montrer que la suite d converge vers 0.

   (d) Pour tout entier naturel n, établir l'égalité :

$$d_n = a_n - \frac{2}{3}\ell \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

   En déduire que la suite a converge et préciser sa limite.