Mathématiques
Corrigé du DS n°3

Exercice 1.

1. (a) La guêpe est en A à l'instant 0 :

$$a_0 = \mathbb{P}(A_0) = 1, \quad b_0 = 0 \quad \text{et} \quad s_0 = 0.$$

Comme elle était en A à l'instant 0 :

$$a_1 = \mathbb{P}(A_1) = \frac{1}{3}.$$

Elle ne peut pas sortir avant l'instant 2

$$b_1 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad s_1 = 0.$$

De plus, $S_2 = A_0 \cap B_1 \cap D_2$, donc d'après la formule des probabilités composées

$$s_2 = \mathbb{P}(S_2) = \mathbb{P}(A_0 \cap B_1 \cap D_2) = \mathbb{P}(A_0) \cdot \mathbb{P}_{A_0}(B_1) \cdot \mathbb{P}_{A_0 \cap B_1}(D_2) = 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6}.$$

(b) D'après la formule de Bayes, on a

$$\mathbb{P}_{A_2}(B_1) = \frac{\mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(A_2)}{\mathbb{P}(A_2)}$$

Comme (A_1, B_1) est un système complet d'événements, d'après la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(A_2) = \mathbb{P}(B_1)\mathbb{P}_{B_1}(A_2) + \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}_{A_1}(A_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{18}.$$

Donc

$$\mathbb{P}_{A_2}(B_1) = \frac{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{5}{18}} = \frac{3}{5}.$$

(c) Pour être en A à l'instant $n+1$ elle pouvait être en A ou en B à l'instant précédent. Donc

$$A_{n+1} = (A_n \cap A_{n+1}) \cup (B_n \cap A_{n+1}),$$

et de la même façon

$$B_{n+1} = (A_n \cap B_{n+1}) \cup (B_n \cap B_{n+1}).$$

(d) Comme les $(A_n \cap A_{n+1})$ et $(B_n \cap A_{n+1})$ sont incompatibles,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_{n+1}) &= \mathbb{P}(A_n \cap A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n \cap A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_n)\mathbb{P}_{A_n}(A_{n+1}) + \mathbb{P}(B_n)\mathbb{P}_{B_n}(A_{n+1}) \\ a_{n+1} &= \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \end{aligned}$$

et de la même façon

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n.$$

2. (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = \frac{2}{3}a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1} = 2\left(\frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{1}{4}b_{n-1}\right) = 2a_n.$$

(b) On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}2a_n = \frac{5}{6}a_n.$$

Ainsi a est une suite géométrique de raison $\frac{5}{6}$ et de premier terme $a_1 = \frac{1}{3}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\frac{1}{3} = \left(\frac{5}{6}\right)^n \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{5} = \left(\frac{5}{6}\right)^n \cdot \frac{2}{5}.$$

On en déduit alors

$$b_n = \frac{4}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

(c) Comme $\left|\frac{5}{6}\right| < 1$, b_n et a_n tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Donc la guêpe finira par se retrouver dehors.

3. (a) La guêpe sort à l'instant n si à l'instant $n-1$ elle était en B et qu'à l'instant n elle est dehors :

$$S_n = B_{n-1} \cap D_n.$$

Donc pour $n \geq 2$,

$$s_n = \mathbb{P}(S_n) = \mathbb{P}(B_{n-1} \cap D_n) = \mathbb{P}(B_{n-1}) \cdot \mathbb{P}_{B_{n-1}}(D_n) = \frac{1}{4} b_{n-1} = \frac{1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$$

(b) La guêpe est dehors à l'instant 10 si elle sort entre l'instant 2 et 10.

$$D_{10} = \bigcup_{k=2}^{10} S_k.$$

Comme on a une union d'événements incompatibles, alors avec le changement d'indice $i = k-2$

$$\mathbb{P}(D_{10}) = \sum_{k=2}^{10} \mathbb{P}(S_k) = \sum_{k=2}^{10} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} = \frac{1}{6}\sum_{k=2}^{10}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2} = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{8}\left(\frac{5}{6}\right)^{i} = \frac{1}{6}\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^9}{1-\frac{5}{6}} = 1-\left(\frac{5}{6}\right)^9$$

<u>Autre méthode :</u> La guêpe est dehors si elle n'est ni en A ni en B à l'instant 10, autrement dit

$$D_{10} = \overline{A_{10} \cup B_{10}}.$$

Comme A_{10} et B_{10} sont incompatibles,

$$\mathbb{P}(D_{10}) = \mathbb{P}\left(\overline{A_{10} \cup B_{10}}\right) = 1 - \mathbb{P}(A_{10}) - \mathbb{P}(B_{10}) = 1 - \frac{2}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{10} - \frac{4}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 1 - \frac{6}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{9}.$$

Exercice 2.

1. Pour $k \in [\![1, N-1]\!]$ l'événement $(X_N = k)$ signifie que l'on a échoué au niveau $k+1$ donc en notant E_i pour échec et S_i pour succès au $i^{ième}$ niveau on a :

$$(X_N = k) = \left(\bigcap_{i=1}^{k} S_i\right) \cap E_{k+1}.$$

D'après la formule des probabilités composées, on obtient

$$\begin{aligned} P(X_N = k) &= \left(\prod_{i=1}^{k} P_{S_1 \cap \cdots \cap S_{i-1}}(S_i)\right) P_{S_1 \cap \cdots \cap S_k}(E_{k+1}) \\ &= \frac{1}{1} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{k}\left(1 - \frac{1}{k+1}\right) \\ &= \frac{k}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot k(k+1)} \\ &= \frac{k}{(k+1)!} \end{aligned}$$

$(X_N = N)$ quant à lui signifie que l'on a passé victorieusement tous les niveaux :

$$(X_N = N) = \left(\bigcap_{i=1}^{N} S_i\right).$$

D'après la formule des probabilités composées, on obtient

$$\begin{aligned} P(X_N = N) &= \left(\prod_{i=1}^{N} P_{S_1 \cap \cdots \cap S_{i-1}}(S_i)\right) \\ &= \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot (N-1) \cdot N} \\ &= \frac{1}{N!} \end{aligned}$$

2. D'après le théorème de transfert
$$E(X_N+1)=\sum_{k=1}^{N}(k+1)\,P(X_N=k)\,.$$
La probabilité étant donnée par deux formules différentes suivant que $k\leq N-1$ ou $k=N$, on découpe tout d'abord la somme pour séparer ces deux conditions :
$$\begin{aligned}E(X_N+1) &= \sum_{k=1}^{N-1}(k+1)\,P(X_N=k)+(N+1)\,P(X_N=N)\\ &= \sum_{k=1}^{N-1}(k+1)\,\frac{k}{(k+1)!}+\frac{N+1}{N!}\end{aligned}$$
Comme $k\geq 1$ dans la somme, on écrit : $(k+1)!=(k+1)\,k\,(k-1)!$
$$E(X_N+1)=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{(k-1)!}+\frac{N}{N!}+\frac{1}{N!}=\sum_{i=0}^{N-2}\frac{1}{i!}+\frac{1}{(N-1)!}+\frac{1}{N!}=\sum_{i=0}^{N}\frac{1}{i!}\text{ avec } i=k-1.$$
Donc $E(X_N+1)=S_N$ et comme $E(X_N+1)=E(X_N)+1$ on a bien finalement $E(X_N)=S_N-1$. Avec l'indication, on obtient alors
$$\lim_{N\to+\infty}E(X_N)=e^1-1=e-1.$$
3. On applique la même technique pour le calcul de $E[(X_N+1)(X_N-1)]$.
On utilise le théorème de transfert et on écrit pour $k\geq 2$, $(k+1)=(k+1)\,k\,(k-1)\,(k-2)!$ alors
$$\begin{aligned}E[(X_N+1)(X_N-1)] &= \sum_{k=1}^{N}(k+1)(k-1)\,P(X_N=k)\\ &= 0p(X_N=0)+\sum_{k=2}^{N-1}(k+1)(k-1)\,\frac{k}{(k+1)!}+\frac{(N+1)(N-1)}{N!}\\ &= \sum_{k=2}^{N-1}\frac{1}{(k-2)!}+\frac{(N+1)(N-1)}{N!}\\ &= \sum_{i=0}^{N-3}\frac{1}{i!}+\frac{(N+1)(N-1)}{N!}\qquad\text{avec } i=k-2\\ &= S_{N-3}+\frac{(N+1)(N-1)}{N!}\end{aligned}$$
4. Déterminons le moment d'ordre 2 de X_N. Par linéarité de l'espérance, on a
$$E[(X_N+1)(X_N-1)]=E\left(X_N^2-1\right)=E\left(X_N^2\right)-1$$
Donc
$$E\left(X_N^2\right)=E[(X_N+1)(X_N-1)]+1=S_{N-3}+\frac{(N+1)(N-1)}{N!}+1.$$
D'après la formule de Koenig-Huygens, on obtient alors
$$V(X_N)=E\left(X_N^2\right)-E(X_N)^2=S_{N-3}+\frac{(N+1)(N-1)}{N!}+1-(S_N-1)^2\,.$$
De plus,
$$S_{N-3}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}e$$
et comme par croissance comparée $\dfrac{N^2}{N!}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0$,
$$\frac{(N+1)(N-1)}{N!}=\frac{N^2\left(1-1/N^2\right)}{N!}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0$$
on a finalement
$$V(X_N)\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}e+1-(e-1)^2=3e-e^2.$$

Exercice 3.

Partie I : Exemples

1. Premiers exemples

Pour tout entier naturel n, calculer w_n en fonction de n dans chacun des cas suivants :

(a) On a alors

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} 2 \cdot 3 = 6\,(n+1)$$

(b) $u_n = 2^n$ et $v_n = 3^n$. On a alors

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} = 3^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3^n \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} - 1}{\frac{2}{3} - 1} = -2^{n+1} + 3^{n+1}$$

(c) $u_n = \frac{2^n}{n!}$ et $v_n = \frac{3^n}{n!}$. On a alors

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \frac{3^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n!} \binom{n}{k} 2^k 3^{n-k} = \frac{1}{n!}\,(2+3)^n = \frac{1}{n!} 5^n$$

2. Un résultat de convergence

Dans cette question, la suite u est définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et v est une suite de réels positifs, décroissante à partir du rang 1 et de limite nulle.

(a) On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{m} u_k &= \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^k \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{m} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-n-1} \quad \text{réindexé } h = k-n-1 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \sum_{h=0}^{m-n-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{h} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n} - 1}{\left(\frac{1}{2}\right) - 1} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}\right) \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1}{2}\right)^{m} \\
&\leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = u_n
\end{aligned}$$

Donc pour $n < m$, on a bien : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{m} u_k \leqslant u_n$.

(b) • Pour $k \leq n$, on a $2n - k \geq n$ et $v_{2n-k} \leq v_n$ car la suite v est décroissante. Comme $u_k \geq 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{2n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_n.$$

De plus,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) \leq 2.$$

Alors

$$\sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{2n-k} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_n \leq 2v_n.$$

- Pour $k \leq 2n-1$ on a $v_{2n-k} \leq v_1$ (par décroissance de la suite v) donc en multipliant par $u_k \geq 0$

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k\, v_{2n-k} \leq \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k\, v_1.$$

Et comme

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k \leq \frac{1}{2^n} = u_n$$

alors

$$\sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k\, v_{2n-k} \leq \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k\, v_1. \leq v_1\, u_n.$$

(c) On sépare les termes de la somme w_{2n} :

$$w_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k\, v_{2n-k} = u_{2n}v_0 + \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n-1} u_k\, v_{2n-k}$$

Ainsi à l'aide de la question précédente :

$$w_{2n} \leqslant v_0\, u_{2n} + 2v_n + v_1\, u_n.$$

On suppose que l'on a obtenu également $w_{2n+1} \leqslant v_0\, u_{2n+1} + 2v_{n+1} + v_1\, u_n$.

(d) Comme (w_{2n}) est positive (somme de termes positifs) et majorée par $u_{2n}v_0 + 2\, v_n + u_n\, v_1$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, alors par encadrement w_{2n} tend vers 0.

De même pour (w_{2n+1}).

Donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini (termes de rangs pairs et impairs).

(e) Soit $w'_n = \sum_{k=0}^{n} u'_k\, v_{n-k}$. On a

$$|w'_n| \leq \sum_{k=0}^{n} \left|u'_k\, v_{n-k}\right| = w_n.$$

Donc par encadrement, $(w'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (i.e. $u' * v$) tend vers 0.

Partie II : Application à l'étude d'un ensemble de suites

Dans cette partie, A désigne l'ensemble des suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

1. (a) Si une suite a est décroissante alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} \leq a_n \leq a_{n-1}$$

donc $a_{n+1} \leq a_{n-1}$ et $a_{n+1} \leq a_n$ en additionnant ces deux inégalités on a

$$2a_{n+1} \leq a_n + a_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}).$$

Donc toute suite décroissante de réels positifs est élément de A.

(b) Si une suite a est strictement croissante alors

$$a_{n+1} > a_n > a_{n-1}$$

et $2a_{n+1} > a_n + a_{n-1}$ et on n'a donc pas

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1}).$$

Donc une suite strictement croissante n'appartient pas à A.

2. Soit $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$.

(a) Une telle suite est récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.

Son équation caractéristique est :

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

Cette équation a pour racines 1 et $-\dfrac{1}{2}$. Donc il existe deux constantes réelles α et β telles que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = \alpha + \beta \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

(b) On pose $\alpha = 1$ et $\beta = 1$, alors on définit

$$\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Elle est solution de $z_{n+1} = \dfrac{1}{2}(z_n + z_{n-1})$ et est positive car $\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \geq -1$ pour tout entier n.

Donc z est élément de A. Mais elle n'est pas monotone :

$$z_0 = 2, \quad z_1 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{5}{4}.$$

Donc il existe une suite non monotone appartenant à A.

3. Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un élément de A et b la suite définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.

On définit alors la suite c par : $c_0 = a_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ c_n = a_n + \dfrac{1}{2}a_{n-1}$.

(a) Pour tout $n \geq 1$ on a :

$$c_n - c_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}a_{n-1} - \left(a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n\right) = \frac{1}{2}\left(a_n + a_{n-1}\right) - a_{n+1} \geq 0 \quad \text{car} \quad a \in A.$$

Donc $c_{n+1} \leq c_n$ et la suite c est décroissante.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n \geq 0$ alors $c_n \geq 0$ et la suite c est décroissante et minorée par 0 donc d'après le théorème de la limite monotone, c converge vers un réel $\ell \geq 0$.

(b) On a $c_{n-n} = a_0$ et si $k \leq n-1$

$$c_{n-k} = a_{n-k} + \frac{1}{2}a_{n-k-1}.$$

Pour $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{0-k} = c_0 = a_0.$$

Pour $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left(a_{n-k} + \frac{1}{2}a_{n-k-1}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k a_{n-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{1}{2}a_{n-k-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k a_{n-k} - \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k+1} a_{n-k-1} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0 \quad \text{réindexé } h = k+1 \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k a_{n-k} - \sum_{h=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^h a_{n-h} + \left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0 \\
&= a_n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n a_0 = a_n
\end{aligned}$$

On a donc $b * c = a$

(c) Soit ε la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_n = c_n - \ell$$

On définit également

$$d = b * \varepsilon.$$

La suite ε est décroissante (car c est décroissante) et tend vers 0. De plus, en utilisant la question I.2.(e) avec $u' = b$ et $v = \varepsilon$, on obtient que $d = b * \varepsilon$ converge vers 0.

(d) On a

$$\begin{aligned} d_n &= \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (c_{n-k} - \ell) = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k c_{n-k} - \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \ell \\ &= a_n - \ell \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - 1}{-\frac{1}{2} - 1} = a_n - \frac{2}{3}\ell \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

Comme $\left|-\dfrac{1}{2}\right| < 1$, alors

$$a_n = d_n + \frac{2}{3}\ell \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{3}\ell.$$