

Mathématiques
Devoir surveillé n°4
Décembre 2024

Durée de l'épreuve : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

On considère la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ définie par :

$$T_0 = 1, \quad T_1 = 2X \quad \text{et, pour tout entier } n \geq 2, \quad T_n = 2XT_{n-1} - T_{n-2}.$$

On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale. Ainsi, pour tout entier $n \geq 2$ et tout réel x ,

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

1. Calculer T_2 et T_3 .
2. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n , T_n est un polynôme de degré n dont on déterminera le coefficient du terme de degré n .
(b) Etablir que, si n est un entier pair (resp. impair), alors T_n est un polynôme pair (resp. impair).
3. Calculer, pour tout entier naturel n , $T_n(1)$ en fonction de n .
4. (a) Etablir, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0, \pi[$:

$$T_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}.$$

- (b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , T_n admet n racines réelles, toutes situées dans $] -1, 1[$, que l'on explicitera.
- (c) Etablir, pour tout entier naturel non nul n :

$$T_n = 2^n \prod_{k=1}^n \left(X - \cos \left(\frac{k\pi}{n+1} \right) \right).$$

- (d) En déduire, pour tout entier naturel non nul n , la valeur de $\prod_{k=1}^n \sin \left(\frac{k\pi}{2(n+1)} \right)$ en fonction de n .
5. (a) Démontrer, pour tout entier naturel n et tout réel θ de $]0, \pi[$:

$$\sin^2 \theta T_n''(\cos \theta) - 3 \cos \theta T_n'(\cos \theta) + (n^2 + 2n)T_n(\cos \theta) = 0.$$

Indication : On pourra dériver deux fois la fonction (nulle) : $\theta \mapsto \sin \theta T_n(\cos \theta) - \sin(n+1)\theta$.

- (b) En déduire, pour tout entier naturel n :

$$(X^2 - 1)T_n'' + 3XT_n' - (n^2 + 2n)T_n = 0.$$

Exercice 2.

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n , par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{1 + e^x} + n x.$$

On appelle (C_n) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 5 cm.

1. (a) Déterminer, pour tout réel x , $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.
(b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.
(b) Montrer que les droites (D_n) et (D'_n) d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes de (C_n) .
(c) Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion (*point où la dérivée seconde s'annule et change de signe*), noté A_n de (C_n) .
(d) Donner l'équation de la tangente (T_1) à la courbe (C_1) en A_1 , puis tracer sur un même dessin les droites (D_1) , (D'_1) et (T_1) ainsi que l'allure de la courbe (C_1) .
3. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n .
(b) Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad -\frac{1}{n} < u_n < 0.$$

- (c) En déduire la limite de la suite (u_n) .
- (d) En revenant à la définition de u_n , montrer que

$$n u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}.$$

Exercice 3.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}.$$

On se propose de construire la courbe représentative de f .

Partie 1. Etude sur $]0, +\infty[$

1. Variations de f

- (a) Déterminer l'ensemble de définition et de dérivabilité de f .
- (b) Soit f' la fonction dérivée de f . Montrer que $f'(x) = \frac{-4e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2}$ et déterminer son signe.

2. Limites

- (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = 1 + \frac{2}{e^{2x} - 1}.$$

- (b) En déduire la limite de f en $+\infty$.
- (c) Déterminer la limite de f en 0^+ .

- 3. En utilisant les résultats précédents, dresser le tableau de variations de f sur $]0, +\infty[$. Déterminer le signe de f sur $]0, +\infty[$.

4. Primitives de f sur $]0, +\infty[$

- (a) Déterminer l'ensemble de définition et la dérivée de la fonction g définie par :

$$g(x) = \ln(e^{2x} - 1) - x.$$

- (b) En utilisant l'étude sur la fonction f , déterminer le sens de variation de g et sa limite en 0^+ .
- (c) En écrivant $e^{2x} - 1 = e^{2x}(1 - e^{-2x})$, déterminer la limite de g en $+\infty$.
- (d) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ a une unique solution sur $]0, +\infty[$.

Partie 2. Construction de $\mathcal{C}$, la courbe représentative de f

- 1. Montrer que pour tout x non nul, $f(x) + f(-x) = 0$. En déduire les symétries de $\mathcal{C}$.
- 2. Déterminer les équations des asymptotes de $\mathcal{C}$.
- 3. Construire $\mathcal{C}$ et ses asymptotes.

Exercice 4.

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction polynomiale $P_n : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in [0, +\infty[$, par :

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k x^k}{k} = -x + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{-x^{2n-1}}{2n-1} + \frac{x^{2n}}{2n}.$$

Partie 1. Étude des fonctions polynomiales P_n

1. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P'_n(x) = \frac{x^{2n} - 1}{x + 1} \quad \text{où } P'_n \text{ désigne la dérivée de } P_n.$$

2. Établir, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les variations de P_n sur $[0, +\infty[$ et dresser le tableau de variations de P_n .

3. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(1) < 0$.

4. (a) Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0, +\infty[$:

$$P_{n+1}(x) = P_n(x) + x^{2n+1} \left(-\frac{1}{2n+1} + \frac{x}{2n+2} \right).$$

- (b) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $P_n(2) \geq 0$.

5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $P_n(x) = 0$, d'inconnue $x \in [1, +\infty[$, admet une solution et une seule notée x_n , et que :

$$1 < x_n \leq 2.$$

6. Déterminer si x_n est une racine simple de P_n .

7. Écrire un programme utilisant la méthode de dichotomie en *Python* qui calcule une valeur approchée décimale de x_2 à 10^{-3} près.

Partie 2. Etude de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

1. Démontrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [1, +\infty[$:

$$t^{2n} - 1 \geq n(t^2 - 1).$$

2. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 < n(x_n - 1) \leq P'_n(x_n).$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que P''_n est positive sur $[1, +\infty[$.

Ainsi P_n est convexe sur $[1, +\infty[$. On admet qu'alors pour $(x, y) \in [1, +\infty[^2$, on ait

$$P_n(x) \geq P'_n(y)(x - y) + P_n(y).$$

4. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$P'_n(x_n) \geq \frac{P_n(1)}{1 - x_n}.$$