Mathématiques
Devoir surveillé n°5
Janvier 2025

Durée de l'épreuve : 4h

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1.

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Justifier que f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, calculer $f'(x)$.
   (c) On admettra que $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \underset{x \to 0}{\to} 0$. Montrer que

   $$f'(x) \underset{x \to 0}{\to} -\frac{1}{2}$$

   (d) Établir que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
2. (a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

   $$u(x) = (1 - x) e^x - 1$$

   (b) Montrer que

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0.$$

   (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Dresser le tableau des variations de f.
   (d) Montrer que la courbe représentative de f admet une droite asymptote au voisinage de $-\infty$.
   (e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.
2. (a) Établir que

   $$\forall x \in [0; +\infty[\,,\ e^{2x} - 2x\, e^x - 1 \geq 0$$

   (b) Montrer que

   $$\forall x \in]0; +\infty[\,,\ f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2x\, e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$$

   (c) Montrer que

   $$\forall x \in [0; +\infty[\,,\ -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0.$$

   (d) Établir

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

3. En déduire

   $$\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} (1 - \alpha)$$

4. Conclure que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α.

Partie III : Étude d'une fonction à partir d'une primitive de f

On note F une primitive de f. On définit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = F(2x) - F(x).$$

1. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. (a) Montrer que

   $$\forall x \in [0; +\infty[\,,\ 0 \leq G(x) \leq x\ f(x).$$

   En déduire la limite de G en $+\infty$.
   (b) Montrer que

   $$\forall x \in]-\infty; 0]\,,\ G(x) \leq x\ f(x).$$

   En déduire la limite de G en $-\infty$.
3. Dresser le tableau des variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

Exercice 2.

Soit E un ensemble et A une partie non vide de E.
Soit a un élément de A, on dit que a est un point extrémal de A si :

$$\forall (x,y) \in A^2 \ , \ \left[\frac{x+y}{2} = a\right] \implies [x = y = a]$$

<u>Partie I : étude d'un premier exemple dans $\mathbb{R}$.</u>

1. On prend ici $E = \mathbb{R}$ et $A =]0,1[$. Montrer qu'aucun point de A n'est extrémal.
   (Indication : on pourra considérer $h = \min\left(\frac{a}{2}, \frac{1-a}{2}\right)$.)
2. On considère maintenant $E = \mathbb{R}$ et $A = [0,1]$. Montrer que les points extrémaux de A sont 0 et 1.

<u>Partie II : étude d'un second exemple dans $M_2(\mathbb{R})$.</u>

Dans cette partie, on note $E = M_2(\mathbb{R})$ et A l'ensemble

$$A = \left\{ M_a = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}, \ \alpha \in [0,1] \right\}.$$

Par ailleurs, J désigne la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. et I_2 désigne la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$.

1. Description et propriétés des éléments de A :
   (a) Vérifier que : $A = \{ \alpha I_2 + (1-\alpha)J \ , \ \alpha \in [0,1] \}$.
   (b) Soient $(\alpha, \beta) \in [0,1]^2$ et $(M_\alpha, M_\beta) \in A$. Montrer que $\frac{1}{2} (M_\alpha + M_\beta) \in A$.
   (c) Déterminer les éléments M_α de A qui sont inversibles dans $M_2(\mathbb{R})$. Pour ceux-ci, donner l'expression de $(M_\alpha)^{-1}$ et préciser pour quelles valeurs de α dans $[0,1]$ on a $(M_\alpha)^{-1} \in A$.
2. Points extrémaux de A.
   (a) Montrer que I_2 et J sont des points extrémaux de A.
   (b) Soit $\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$. Vérifier que $M_\alpha = \frac{1}{2} (M_{2\alpha} + J)$. En déduire que M_α n'est pas extrémal.
   (c) Par une méthode similaire, montrer que si $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1[$, M_α n'est pas extrémal.
3. Réduction simultanée des matrices de A.
   (a) Soient $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, après avoir justifié l'inversibilité de P, montrer que $J = PDP^{-1}$.
   (b) Montrer que $P^{-1} M_\alpha P = D_\alpha$ est diagonale. Préciser D_α.
   (c) Déterminer les réels α de $]0,1]$ tels que $M_\alpha^2 = M_\alpha$.

Exercice 3.

On désigne par n un entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines positives de l'équation suivante que l'on note (E_n)

$$e^x = x^n$$

À cet effet, on introduit la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$

1. <u>Etude des racines positives des équations (E_1) et (E_2)</u>

   (a) Étudier et représenter sur $[0, +\infty[$ les fonctions f_1 et f_2.

   (b) Étudier l'existence de racines positives pour les équations (E_1) et (E_2).
   On rappelle que $2 < e < 3$.

2. <u>Etude des racines positives de l'équations (E_3)</u>

   (a) Étudier et représenter sur $[0, +\infty[$ la fonction f_3.
   On donne les valeurs approchées : $e^2 \simeq 7,4$; $e^3 \simeq 20,1$; $e^4 \simeq 54,6$; $e^5 \simeq 148,4$
   En déduire que l'équation (E_3) admet deux racines positives u et v telles que $1 < u < v$, et encadrer chacune d'elles par deux entiers consécutifs.

   (b) Soit la suite (y_n) définie par la condition initiale $y_0 \in \mathbb{R}$ avec $y_0 > u$ et la relation

   $$y_{n+1} = 3\,\ln(y_n)$$

      i. Montrer que si $u < y_0 \leq v$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u < y_n \leq v$.

      ii. Montrer que si $v \leq y_0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v \leq y_n$.

      iii. Étudier le signe de $y_{n+1} - y_n$ en fonction du signe de $y_n - y_{n-1}$.

      iv. En déduire selon la position de y_0 par rapport à v, le sens de variation de la suite (y_n).

      v. Étudier la convergence et la limite de la suite (y_n)

   (c) On choisit désormais $y_0 = 4$

      i. Ecrire en *Python* un algorithme permettant le calcul de y_n pour un entier n demandé à l'utilisateur.

      ii. Etablir pour tout $n \in \mathbb{N}$ que

      $$0 \leq v - y_{n+1} \leq 0,75\,(v - y_n)$$

      puis que

      $$0 \leq v - y_n \leq (0,75)^n$$

      iii. Comment suffit-il de choisir n pour que y_n constitue une valeur approchée de v à 10^{-5} près ?

      iv. Ecrire en *Python* un algorithme permettant le calcul d'une valeur approchée de v à 10^{-5} près.

3. <u>Etude des racines positives de l'équation (E_n) pour $n \geq 3$.</u>

   (a) Etudier sur $[0, +\infty[$ la fonction f_n. En déduire que l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n telles que

   $$1 < u_n < v_n$$

   (b) Déterminer pour $n \geq 4$, le signe de $f_n(u_{n-1})$. Déduire des variations de la fonction f_n, le sens de variation de la suite (u_n) puis prouver la convergence de celle-ci.

   (c) Montrer que

   $$u_n = e^{\frac{u_n}{n}}$$

   En déduire la limite L de la suite (u_n), puis montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n(u_n - L) = 1$.

   (d) Déterminer, pour $n \geq 4$ le signe de $f_{n-1}(v_n)$. Déduire des variations de la fonction f_n, le sens de variation de la suite (v_n), puis étudier la limite de celle-ci.

   (e) On pose pour tout réel $x > 1$:

   $$g(x) = x - \ln(x)$$

      i. Montrer que g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]1, +\infty[$.

      ii. Etablir que $g(v_n/n) = \ln(n)$, montrer à l'aide de g^{-1} (bijection réciproque de g) que v tend vers $+\infty$, puis montrer que

      $$\lim_{n\to+\infty} \frac{v_n}{n\ln(n)} = 1$$