Mathématiques
Corrigé du DS n°5

Exercice 1.

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. (a) Pour tout $x \neq 0 : e^x - 1 \neq 0$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues.
En $0 : e^x - 1 \sim x$ et donc pour $x \neq 0 : f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} \to 1 = f(0)$
Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

(b) Pour $x \neq 0 : e^x - 1 \neq 0$ donc f est C^1sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions C^1 et

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 - x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$$

(c) On a : $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ avec $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to 0$ donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) - 1 - x\left[1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right]}{\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) - 1\right)^2} \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)x^2 + x^2\varepsilon_1(x)}{(x + x\varepsilon_2(x))^2} \quad \text{avec } \varepsilon_1(x) = \varepsilon(x)(1 - x) \text{ et } \varepsilon_2(x) = x\left(\frac{1}{2} + \varepsilon(x)\right) \\ &= \frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon_1(x)}{(1 + \varepsilon_2(x))^2} \to -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f'(x) \underset{x \to 0}{\to} -\dfrac{1}{2}}$

(d) Comme f est continue en 0 et que $f'(x) \to -\dfrac{1}{2}$ alors d'après le théorème de prolongement de la dérivée f est C^1 en 0 et $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(0) = -\dfrac{1}{2}.}$

2. (a) $u(x) = (1 - x)e^x - 1$
u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} u'(x) &= (1 - x)e^x - e^x \\ &= -xe^x \end{aligned}$$

Donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$	
$u(x)$		$\nearrow -$	0	$\searrow -$	

(b) Comme on, pour tout $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{u(x)}{(e^x - 1)^2}$ alors f est du signe de $u(x) < 0$ pour $x \neq 0$.
Et pour $x = 0 : f'(x) = -\frac{1}{2} < 0$ alors
Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0.}$

(c) En $-\infty : f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} \to +\infty$
En $+\infty : f(x) = \dfrac{x}{e^x - 1} = \dfrac{x}{e^x(1 - 1/e^x)} \to 0$ car $x = o(e^x)$ et

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-\frac{1}{2}$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

(d) En $-\infty$: $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{e^x - 1} \to -1$

et

$$\begin{aligned} f(x) + x &= \frac{x}{e^x - 1} + x \\ &= \frac{xe^x}{e^x - 1} \end{aligned}$$

avec $X = -x \to +\infty$ on a $xe^x = -X/e^X \to 0$ car $X = o\left(e^X\right)$ quand $X \to +\infty$

Donc $f(x) + x \to 0$

Conclusion : $\boxed{\text{la droite d'équation } y = -x \text{ est asymptote à la courbe représentative de } f \text{ en } -\infty}$

(e) On attende le tracé de

— l'asymptote en $-\infty$,

— l'asymptote horizontale ($y = 0$) en $+\infty$

— et la tangente de pente $-\frac{1}{2}$ en $(0, 1)$.

Bilan : cette partie, sans difficultés de calcul nécessite de connaître et savoir manipuler les DL, les hypothèses du th de prolongement C^1, et de voir le lien entre f' et u.

Donne aussi l'occasion d'utiliser le DL à mauvais escient

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. 0 n'est pas point fixe puisque $f(0) \neq 0$

   Pour $x \neq 0$: $f(x) = x \iff \frac{x}{e^x-1} = x \iff 1 = e^x - 1 \iff e^x = 2 \iff x = \ln(2)$

   Conclusion : $\boxed{f \text{ admet un point fixe et un seul, } \alpha = \ln(2)}$

2. (a) Soit $g(x) = e^{2x} - 2x\, e^x - 1$. g est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x \\ &= 2e^x\left(e^x - 1 - x\right) \end{aligned}$$

soit $h(x) = e^x - 1 - x$. h est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et

$$h'(x) = e^x - 1$$

On a donc

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	0	$\nearrow +$
$h(x)$	0	$\nearrow +$ $+\infty$

et

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$
$g(x)$	0	$\nearrow +$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in [0; +\infty[,\ e^{2x} - 2x\, e^x - 1 \geq 0}$

(b) Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{e^x - 1 - xe^x}{\left(e^x - 1\right)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2e^x - 2 - 2xe^x + e^{2x} - 2e^x + 1}{2\left(e^x - 1\right)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 2x\, e^x - 1}{2\left(e^x - 1\right)^2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in]0; +\infty[,\ f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2x\, e^x - 1}{2\left(e^x - 1\right)^2}}$

(c) Comme $g(x) \geq 0$ pour tout $x > 0$, $f'(x) + \dfrac{1}{2} \geq 0$ et $-\dfrac{1}{2} \leq f'(x)$

Et pour $x = 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{2}$.

Enfin on a vu que $f' < 0$ sur $\mathbb{R}$ donc

Conclusion : $\boxed{\forall x \in [0; +\infty[,\ -\frac{1}{2} \leq f'(x) < 0.}$

(d) On a donc $|f'(x)| = -f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$

On montre alors, par récurrence, que pour tout n : $u_n \in \mathbb{R}^+$

$u_0 = 1 \in \mathbb{R}^+$ et pour tout $n \geq 1$: $u_n = f(u_{n-1}) > 0$ car $f > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Donc, pour tout entier n : u_n et $\alpha \in \mathbb{R}^+$ et $|f'| \leq \dfrac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}^+$ donc $|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$ et

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|}$

3. On montre alors par récurrence :

   Pour $n = 0$: $|u_0 - \alpha| = \dfrac{1}{2}|1 - \alpha| = \dfrac{1}{2}(1 - \alpha)$ car $\alpha = \ln(2) \leq 1$

   Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$ alors $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^{n+1}}(1 - \alpha)$

   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)}$

4. Et comme $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$ alors $\dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha) \to 0$ et comme $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$, par encadrement $|u_n - \alpha| \to 0$ et

   Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha = \ln(2)}$

Partie III : Étude d'une fonction à partir d'une primitive de f

On note F une primitive de f. On définit $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = F(2x) - F(x).$$

1. F est une primitive d'une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc F est C^1 sur $\mathbb{R}$. Donc G est C^1 sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions C^1.

   et on a :

$$\begin{aligned}
G'(x) &= 2F'(2x) - F'(x) \\
&= 2f(2x) - f(x) \\
&= 2\frac{2x}{e^{2x} - 1} - \frac{x}{e^x - 1} \text{ si } 2x \text{ et } x \neq 0 \\
&= \frac{4x - x(e^x + 1)}{e^{2x} - 1} \\
&= \frac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} \\
G'(0) &= 2f(0) - f(0) = 1
\end{aligned}$$

   Conclusion : $\boxed{G \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3 - e^x)}{e^{2x} - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}}$

2. (a) Soit $x \geq 0$. On a alors $x \leq 2x$ et F est dérivable sur $[x, 2x]$ donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, 2x[$ tel que

$$\frac{F(2x) - F(x)}{2x - x} = F'(c) = f(c).$$

   Or f est positive et décroissante sur $\mathbb{R}$ donc comme $c \geq x$ alors

$$0 \leq f(c) \leq f(x)$$

   Ainsi

$$0 \leq \frac{F(2x) - F(x)}{2x - x} \leq f(x).$$

   Comme x est positif, on peut conclure

   Conclusion : $\boxed{\forall x \in [0; +\infty[,\ 0 \leq G(x) \leq x\ f(x).}$

   Et comme par croissance comparée, $x\ f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1} = \dfrac{x^2}{e^x}\dfrac{1}{1 - e^{-x}} \to 0$, par encadrement :

   Conclusion : $\boxed{G(x) \to 0 \text{ quand } x \to +\infty}$

   (b) Soit $x \leq 0$. On a alors $x \geq 2x$ et F est dérivable sur $[2x, x]$ donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $d \in]2x, x[$ tel que

$$\frac{F(x) - F(2x)}{x - 2x} = F'(d) = f(d).$$

   Or f est décroissante sur $\mathbb{R}$ donc comme $d \leq x$ alors

$$f(d) \geq f(x)$$

Ainsi

$$\frac{F(x)-F(2x)}{x-2x} \geq f(x).$$

Comme $-x$ est positif, on a

$$-G(x) \geq -xf(x).$$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in]-\infty;0]\,,\ G(x) \leq x\ f(x)\,.}$
Et comme $x\ f(x) = \frac{x^2}{e^x-1} \to -\infty$, par majoration,
Conclusion : $\boxed{G(x) \to -\infty \text{ quand } x \to -\infty}$

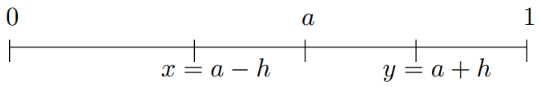
3. On rassemble tout :

x	$-\infty$	$-$	0	$+$	$\ln(3)$	$-$	$+\infty$
$e^{2x}-1$		$\nearrow -$	0	$\nearrow +$		$\nearrow +$	
$3-e^x$		$\searrow +$		$\searrow +$	0	$\searrow -$	
$G'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	
$G(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$G(\ln 3)$	$\searrow$	0

Exercice 2.

<u>Partie I : étude d'un premier exemple dans $\mathbb{R}$.</u>

1. On prend ici $E=\mathbb{R}$ et $A=]0,1[$. Soit $a\in]0,1[$, comme $0<a<1$, on a $h=\min\left(\frac{a}{2},\frac{1-a}{2}\right)>0$.
Ainsi $a+h\leq a+\frac{1-a}{2}=\frac{1+a}{2}<1$ car $a<1$. Et $a-h\geq a-\frac{a}{2}=\frac{a}{2}>0$.
Donc $0<a-h<a<a+h<1$ et $\frac{1}{2}(a-h+a+h)=a$ avec $a-h\neq a$. Finalement, a n'est pas un point extrémal de $]0,1[$.
On donne un exemple ci-dessous avec $\frac{1}{2}<a<1$, donc $h=\frac{1-a}{2}$.



2. On considère maintenant $E=\mathbb{R}$ et $A=[0,1]$. La question précédente montre, avec de mineures adaptations, qu'aucun point de $]0,1[$ n'est extrémal de $[0,1]$.
Montrons que 0 est extrémal de A. Supposons qu'il existe $x,y\in[0,1]$ tel que $\frac{1}{2}(x+y)=0$. Or, une somme de réels positifs est nulle si et seulement si tous les termes sont nuls, donc ici $x=y=0$. Ainsi 0 est extrémal de A.
Montrons que 1 est extrémal de A. Supposons qu'il existe $x,y\in[0,1]$ tel que $\frac{1}{2}(x+y)=1$. Si $x<1$, alors $x+y<2$ car $y\leq 1$. C'est absurde, donc $x=1$ et $y=2-x=1$. Ainsi, 1 est extrémal de A.

<u>Partie II : étude d'un second exemple dans $M_2(\mathbb{R})$.</u>

Dans cette partie, on note A l'ensemble

$$A=\left\{M_a=\begin{pmatrix}\alpha & 1-\alpha\\ 1-\alpha & \alpha\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R}),\ \alpha\in[0,1]\right\}.$$

Par ailleurs, J désigne la matrice $J=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. et I_2 désigne la matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$.

1. Description et propriétés des éléments de A :
   (a) On a
   $$\begin{aligned}A&=\left\{\alpha\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}+(1-\alpha)\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ \alpha\in[0,1]\right\}\\&=\left\{\alpha I_2+(1-\alpha)J,\ \alpha\in[0,1]\right\}.\end{aligned}$$
   On voit alors que A est un paramétrage du segment d'extrémités I_2 et J dans $M_2(\mathbb{R})$.
   (b) Soient $(\alpha,\beta)\in[0,1]^2$ et $(M_\alpha,M_\beta)\in A^2$. Par un calcul simple, on obtient :
   $$\frac{1}{2}(M_\alpha+M_\beta)=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)I_2+\left(1-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\right)J.$$
   Comme $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\in[0,1]$, on a bien $\frac{1}{2}(M_\alpha+M_\beta)\in A$.
   Comme $(\alpha,\beta)\in[0,1]^2$, on a $\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\in[0,1]$ ainsi $\frac{1}{2}\ (M_\alpha+M_\beta)=M_{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\in A$.

(c) Soit $\alpha \in [0,1]$, la matrice M_α est inversible si et seulement si $\alpha^2 - (1-\alpha)^2 \neq 0$, soit $2\alpha - 1 \neq 0$, c'est-à-dire $\alpha \neq \frac{1}{2}$.
Si $\alpha = 0$, $M_0 = J$ est inversible avec $M_0^{-1} = J \in A$.
Si $\alpha = 1$, $M_1 = I_2$ est inversible avec $M_1^{-1} = I_2 \in A$.
Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$, on a $M_\alpha^{-1} \notin A$.

2. Points extrémaux de A.

(a) On peut remarquer que, pour tout $\alpha \in [0,1]$, on a

$$M_\alpha = I_2 \Longleftrightarrow \alpha = 1 \text{ et } 1-\alpha = 0 \Longleftrightarrow \alpha = 1.$$

Par conséquent, pour tout $\beta \in [0,1]$, on a, en exploitant la question 2 de la partie I,

$$\frac{1}{2}\left(M_\alpha + M_\beta\right) = I_2 \Longleftrightarrow M_{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = I_2 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 1 \underset{\text{QI2}}{\Longleftrightarrow} \alpha = \beta = 1 \Longleftrightarrow M_\alpha = M_\beta = I_2.$$

De même, on peut remarquer que, pour tout $\alpha \in [0,1]$, on a

$$M_\alpha = J \Longleftrightarrow \alpha = 0 \text{ et } 1-\alpha = 1 \Longleftrightarrow \alpha = 0.$$

Par conséquent, pour tout $\beta \in [0,1]$, on a, en exploitant la question 2 de la partie I,

$$\frac{1}{2}\left(M_\alpha + M_\beta\right) = J \Longleftrightarrow M_{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)} = J \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(\alpha+\beta) = 0 \underset{\text{QI2}}{\Longleftrightarrow} \alpha = \beta = 0 \Longleftrightarrow M_\alpha = M_\beta = J.$$

Donc I_2 et J sont des points extrémaux de A.

(b) Soit $\alpha \in]0, \frac{1}{2}]$. On a $2\alpha \in]0,1]$. Avec la question II.1.(b),

$$\frac{1}{2}\left(M_{2\alpha} + J\right) = \frac{1}{2}\left(M_{2\alpha} + M_0\right) = M_{\frac{1}{2}(2\alpha+0)} = M_\alpha.$$

Comme $\alpha \neq 0$, on a $J = M_0 \neq M_\alpha$, donc M_α n'est pas extrémal.

(c) Soit $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1[$. Alors $2\alpha - 1 \in [0,1[$ et

$$\frac{1}{2}\left(M_{2\alpha-1} + I_2\right) = \frac{1}{2}\left(M_{2\alpha-1} + M_1\right) = M_{\frac{1}{2}(2\alpha+0)} = M_\alpha.$$

On a $\alpha \neq 1$, donc $I_2 \neq M_\alpha$. Donc M_α n'est pas extrémal.

3. Réduction simultanée des matrices de A.

(a) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, on remarque que la matrice P est une matrice carrée de taille 2 et $1 \times (-1) - 1 \times 1 = -2 \neq 0$, donc P est inversible et

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = J$$

(b) On observe que

$$I_2 = PI_2P^{-1}.$$

Ainsi, pour tout α de $[0,1]$, comme $M_\alpha = \alpha I_2 + (1-\alpha)J$ alors

$$P^{-1}M_\alpha P = P^{-1}\left(\alpha P I_2 P^{-1} + (1-\alpha)PDP^{-1}\right)P = \alpha I_2 + (1-\alpha)D = D_\alpha$$

avec $D_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2\alpha - 1 \end{pmatrix}$.

(c) On voit que $J^2 = I_2$ et $J = J \times I_2 = I_2 \times J$ donc

$$M_\alpha^2 = M_\alpha \Longleftrightarrow (\alpha I_2 + (1-\alpha)J)^2 = \alpha I_2 + (1-\alpha)J \Longleftrightarrow \alpha^2 I_2 + 2\alpha(1-\alpha)J + (1-\alpha)^2 J^2 = \alpha I_2 + (1-\alpha)J$$
$$\Longleftrightarrow (\alpha^2 + 1 - 2\alpha + \alpha^2)I_2 + 2\alpha(1-\alpha)J = \alpha I_2 + (1-\alpha)J \Longleftrightarrow (\alpha^2 + 1 - 3\alpha + \alpha^2)I_2 + (2\alpha-1)(1-\alpha)J = (0).$$
$$\Longleftrightarrow (-2\alpha+1)(1-\alpha)I_2 + (2\alpha-1)(1-\alpha)J = (0).$$
$$\Longleftrightarrow (2\alpha-1)(1-\alpha)I_2 = (2\alpha-1)(1-\alpha)J.$$

Donc en utilisant les coefficients de I_2 et J, on a

$$M_\alpha^2 = M_\alpha \Longleftrightarrow (2\alpha-1)(1-\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \alpha \in \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}.$$

Ainsi $M_1 = I_2$ et $M_{\frac{1}{2}}$ sont les seules solutions de $M_\alpha^2 = M_\alpha$.

Exercice 3.

On désigne par n un entier naturel non nul et l'on se propose d'étudier les racines positives de l'équation suivante que l'on note (E_n)

$$e^x = x^n$$

À cet effet, on introduit la fonction f_n définie par

$$f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}.$$

On a donc pour tout entier n,

$$(E_n) \Leftrightarrow f_n(x) = 0.$$

1. Étude des racines positives des équations (E_1) et (E_2)

   (a) On étudie les variations :

   — On a $f_1(x) = 1 - xe^{-x}$. f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f_1'(x) = -e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x}$$

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$f_1'(x)$	-1	$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	1	$\searrow$	$\frac{e-1}{e}$	$\nearrow$	1

   En $+\infty$: $f_1(x) = 1 - xe^{-x} = 1 - x/e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par croissance comparée.

   — On a $f_2(x) = 1 - x^2e^{-x}$. f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f_2'(x) = -2xe^{-x} + x^2e^{-x} = x(x-2)e^{-x}$$

x	0		2		$+\infty$
$x(x-2)$	0	$-$	0	$+$	
$f_2'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_2(x)$	1	$\searrow$	$1-\frac{4}{e^2}$	$\nearrow$	1

   En $+\infty$: $f_2(x) = 1 - x^2e^{-x} = 1 - x^2/e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par croissance comparée.

   (b) $(E_1) \Leftrightarrow f_1(x) = 0$. Or le minimum de f_1 est $\dfrac{e-1}{e} > 0$ et l'équation n'a pas de solution positive.

   De même $(E_2) \Leftrightarrow f_2(x) = 0$. Or le minimum de f_2 est $\dfrac{e^2-4}{e^2} > 0$ car $e > 2$ donc $e^2 > 4$ (car la fonction carré est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$) et l'équation (E_2) n'a pas de solution positive.

2. Etude des racines positives de l'équations (E_3)

   (a) On a $f_3(x) = 1 - x^3e^{-x}$. f_3 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f_3'(x) = -3x^2e^{-x} + x^3e^{-x} = x^2(x-3)e^{-x}$$

x	0		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	0	$+$	
x^2	0	$+$		$+$	
$f_3'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_3(x)$	1	$\searrow$	$1-\frac{27}{e^3}$	$\nearrow$	1

   En $+\infty$: $f_3(x) = 1 - x^3e^{-x} = 1 - x^3/e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par croissance comparée

   Cette fois, comme $e^3 < 27$ alors $1 - \dfrac{27}{e^3} < 0$.

   On a $f_3(2) = 1 - 8/e^2 > 0$, donc f_3 est strictement positive sur $[0, 2]$

   Comme f_3 est continue et strictement décroissante sur $]2, 3[$, d'après le théorème de la bijection monotone, elle est bijective de $]2, 3[$ dans $\left]1 - \frac{27}{e^3}, 1 - \frac{8}{e^2}\right[$. Or 0 appartient à cet intervalle donc l'équation $(E_3) \Leftrightarrow f_3(x) = 0$ a une unique solution u sur cet intervalle. $(2 < u < 3)$

   De même, comme $f_3(4) = 1 - 4^3/e^4 < 0$ et $f_3(5) = 1 - 5^3/e^5 > 0$, (E_3) a une unique solution v sur l'intervalle $]4, 5[$ et n'en a aucune sur $[3, 4]$ ni sur $[5, +\infty[$

   Donc l'équation (E_3) admet deux racines positives u et v telles que

$$1 < 2 < u < 3 < 4 < v < 5$$

(b) Soit la suite (y_n) définie par la condition initiale $y_0 \in \mathbb{R}$ avec $y_0 > u$ et la relation

$$y_{n+1} = 3\ \ln(y_n)$$

i. Si $u < y_0 \leq v$, alors pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$u < y_n \leq v$."
Initialisation : Pour $n = 0$ on a $u < y_0 \leq v$.
$\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence,

$$u < y_n \leq v$$

Comme $x \mapsto ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient

$$3\ln(u) < 3\ln(y_n) \leq 3\ln(v)$$

Et comme u et v sont solutions de $x^3 = e^x \Leftrightarrow 3\ln(x) = x$ alors on a

$$u < y_{n+1} \leq v$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u < y_n \leq v$.

ii. De même par récurrence si $v \leq y_0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v \leq y_n$.

iii. Comme $x \mapsto ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a

$$y_n - y_{n-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_n > y_{n-1} \quad \Leftrightarrow \quad 3\ln(y_n) > 3\ln(y_{n-1})$$

Finalement

$$y_n - y_{n-1} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_{n+1} - y_n > 0.$$

De même, dans les autres cas. Donc $y_{n+1} - y_n$ est du même signe que $y_n - y_{n-1}$ et par récurrence du même signe que $y_1 - y_0$. Pour résumer,
- Si $y_0 < y_1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n < y_{n+1}$.
- Si $y_0 > y_1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n > y_{n+1}$.

iv. Pour $u < y_0 \leq v$ on a, d'après les variations de f_3 :

$$f_3(y_0) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - y_0^3 e^{-y_0} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{y_0} < y_0^3$$

Comme ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$, alors $y_0 \leq 3\ln(y_0)$ et donc

$$y_0 \leq y_1.$$

Donc si $u < y_0 \leq v$, alors, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_n < y_{n+1}$ et la suite (y_n) est donc croissante.
De même si $y_0 \geq v$, alors $f_3(y_0) \geq 0$ et la suite (y_n) est décroissante.

v.
- Si $u < y_0 \leq v$, alors la suite (y_n) est donc croissante et majorée par v, donc d'après le théorème de la limite monotone (y_n) converge.
- Si $y_0 > v$, alors la suite (y_n) est donc décroissante et minorée par v, donc d'après le théorème de la limite monotone (y_n) converge.

Comme $x \mapsto 3\ln(x)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, alors si (y_n) converge vers un réel ℓ, alors

$$\ell = 3\ln(\ell) \quad \Longleftarrow \quad \ell = \ln(\ell^3) \quad \Longleftarrow \quad e^\ell = \ell^3 \quad \Longleftarrow \quad f_3(\ell) = 0$$

Or
- Si $u < y_0 \leq v$, alors $\ell \geq y_0 > u$, donc nécessairement $\ell = v$.
- Si $y_0 > v$, alors $\ell \geq v$, donc $\ell = v$.

Par conséquent, si $y_0 > u$, alors

$$y_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} v.$$

(c) On choisit désormais $y_0 = 4$

i. Il faut demander n puis calculer de y_1 à y_n :

```
import numpy as np
n=eval(input('donner une valeur de n'))
y=4;
for k in range(1,n+1):
    y=3*np.log(y);
print(y)
```

ii. Avec $y_0 = 4 < v$, la suite y sera croissante. On aura pour tout entier n, $4 \leq y_n \leq v$
Pour établir que pour tout entier naturel n que $0 \leq v - y_{n+1} \leq 0,75(v - y_n)$ on utilise l'inégalité des accroissements finis.
Il faut pour cela majorer la dérivée de $x \mapsto 3\ln(x)$ sur l'intervalle $[4, v]$

$$(3\ln)'(x) = \frac{3}{x} \leq \frac{3}{4} = 0,75 \qquad \text{car } x \geq 4$$

Donc $|f'(x)| < 0,75$ sur $[4, v]$ et comme f est dérivable sur $[4, v]$ et que y_n et v appartiennent à cet intervalle, d'après l'inégalité des accroissements finis on a

$$|f(v) - f(y_n)| \leq 0,75\,|v - y_n|$$

Comme $y_n \leq v$ pour tout entier n, on a bien

$$0 \leq v - y_{n+1} \leq 0,75\,(v - y_n)$$

On a alors par récurrence :
Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit la proposition $\mathcal{P}(n)$: "$0 \leq v - y_n \leq (0,75)^n$."
Initialisation : Pour $n = 0$, on a on a $4 \leq y_0 \leq v \leq 5$ donc $v \leq 5$ et $-y_0 \leq -4$, par conséquent

$$0 \leq v - y_0 \leq 1 = (0,75)^0$$

$\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
Hérédité : On suppose que pour un $n \in \mathbb{N}$ fixé, la proposition $\mathcal{P}(n)$ est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence, $0 \leq v - y_n \leq (0,75)^n$ et comme $0,75 > 0$, d'après la question précédente on obtient

$$0 \leq v - y_{n+1} \leq 0,75\,(v - y_n) \leq (0,75)^{n+1}$$

$\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq v - y_n \leq (0,75)^n$.

iii. Pour que y_n constitue une valeur approchée de v à 10^{-5} près, il suffit donc que $(0,75)^n \leq 10^{-5}$. On a donc

$$(0,75)^n \leq 10^{-5} \quad \Longleftrightarrow \quad n \geq -5\,\frac{\ln(10)}{\ln(0,75)} \ \text{ car } \ln(0,75) < 0$$

Il faut calculer à la fois y_n et $(0,75)^n$ jusqu'à ce que $(0,75)^n$ soit inférieure ou égale à 10^{-5}.

iv. On peut proposer le programme suivant

```
import numpy as np
y=4
n=0
while n < -5*np.log(10)/np.log(0.75):
   y=3*np.log(y)
   n=n+1 # on compte le nombre de fois que l'on passe dans la boucle.
print(y)
```

3. Etude des racines positives de l'équation (E_n) pour $n \geq 3$.

(a) On a $f_n(x) = 1 - x^n e^{-x}$. f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$f_n'(x) = -nx^{n-1}e^{-x} + x^n e^{-x} = x^n\,(x - n)\,e^{-x}$$

x	0		n		$+\infty$
$x - n$		$-$	0	$+$	
x^{n-1}	0	$+$		$+$	
$f_n'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	1	$\searrow$	$1 - \frac{n^n}{e^n}$	$\nearrow$	1

En $+\infty$: $f_n(x) = 1 - x^n e^{-x} = 1 - x^n/e^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ par croissance comparée.
Comme $n \geq 3 > e$, alors $(n/e) > 1$ et $(n/e)^n > 1$ car $n > 0$ et $x \mapsto x^n$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, donc

$$f_n(n) < 0.$$

De plus, $f_n(1) = 1 - \dfrac{1}{e} > 0$, donc $f_n > 0$ sur $[0,1]$.
Sur $]1,n[$, la fonction f_n est continue et strictement décroissante, d'après le théorème de la bijection monotone, f_n est donc bijective de $]1,n[$ dans $]f_n(n), f_n(1)[$. Comme $0 \in]f_n(n), f_n(1)[$, l'équation $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow (E_n)$ a une unique solution u_n sur $]1,n[$.
De même, $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow (E_n)$ a une unique solution v_n sur $]n,+\infty[$.
Donc l'équation (E_n) admet deux racines positives u_n et v_n telles que

$$1 < u_n < n < v_n.$$

(b) Pour déterminer le signe de $f_n(u_{n-1})$, on utilise l'équation $f_{n-1}(u_{n-1}) = 0$ pour $n-1 \geq 3$, donc $n \geq 4$:

$$f_{n-1}(u_{n-1}) = 1 - (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} = 1$$

donc

$$\begin{array}{rcl} f_n(u_{n-1}) & = & 1 - (u_{n-1})^n e^{-u_{n-1}} \\ & = & 1 - u_{n-1} \quad \text{car } (u_{n-1})^{n-1} e^{-u_{n-1}} = 1 \end{array}$$

Comme $1 < u_{n-1}$, alors pour tout entier $n \geq 4$ on a :

$$f_n(u_{n-1}) < 0.$$

On a donc $f_n(u_{n-1}) < 0 = f_n(u_n)$. Comme f_n est strictement décroissante sur $[0,n]$ et que u_n et u_{n-1} en sont éléments alors

$$u_{n-1} > u_n.$$

La suite u est donc décroissante et minorée par 1. D'après le théorème de la limite monotone, u converge donc vers une limite L.

(c) On a

$$n\ln(u_n) = u_n \quad \Longleftrightarrow \quad \ln(u_n) = \frac{u_n}{n} \quad \Longleftrightarrow \quad u_n = e^{u_n/n}.$$

Or $\dfrac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1 = L$ (car $x \mapsto e^x$ est continue en 0). De plus,

$$n(u_n - L) = n(u_n - 1) = u_n \frac{e^{u_n/n} - 1}{\frac{u_n}{n}}$$

Or si $\dfrac{u_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, alors

$$\frac{e^{u_n/n} - 1}{\frac{u_n}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

On en conclut donc, comme $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$,

$$n(u_n - L) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

(d) On a comme pour u_n

$$\begin{array}{rcl} f_{n-1}(v_n) & = & 1 - (v_n)^{n-1} e^{-v_n} \\ & = & 1 - \dfrac{1}{v_n} > 0 \end{array}$$

Donc $f_{n-1}(v_{n-1}) = 0 < f_{n-1}(v_n)$. Et comme f_{n-1} est strictement croissante sur $[n-1,+\infty[$ et que v_n ($v_n \geq n \geq n-1$) et v_{n-1} en sont éléments alors

$$v_{n-1} < v_n.$$

La suite v est donc croissante. Comme $v_n > n$, on a par minoration

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

(e) On pose pour tout réel $x > 1$:

$$g(x) = x - \ln(x)$$

i. g est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \quad \text{et} \quad g(1) = 0$$

Comme g est strictement croissante et continue sur $]1, +\infty[$, d'après le théorème de la bijection monotone, g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $\left]g(1), \lim\limits_{x \to +\infty} g(x)\right[=]1, +\infty[$. g a donc une réciproque, notée g^{-1}.

ii. On a $(v_n)^n = e^{v_n}$, donc

$$v_n = e^{v_n/n}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned}
g\left(\frac{v_n}{n}\right) &= \frac{v_n}{n} - \ln\left(\frac{v_n}{n}\right) \\
&= \frac{v_n}{n} - \ln\left(\frac{e^{v_n/n}}{n}\right) \qquad \text{car } v_n = e^{v_n/n} \\
&= \frac{v_n}{n} - \ln\left(e^{v_n/n}\right) + \ln(n) \\
&= \ln(n)
\end{aligned}$$

Comme $v_n/n \in]1, +\infty[$ (car $v_n > n$) et que $\ln(n) \in]1, +\infty[$ (car $n > e$) alors

$$g\left(\frac{v_n}{n}\right) = \ln(n) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{v_n}{n} = g^{-1}(\ln(n))$$

Or, comme $y = g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors, par symétrie, $x = g^{-1}(y) \underset{y \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Par conséquent, on a

$$\frac{v_n}{n} = g^{-1}(\ln(n)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Donc

$$v_n = n\, g^{-1}(\ln(n)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Pour conclure, montrons que $\dfrac{\ln(n)}{g^{-1}(\ln(n))} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$.

Soit $w_n = g^{-1}(\ln(n))$, on a alors $g(w_n) = \ln(n)$, ainsi

$$\frac{\ln(n)}{g^{-1}(\ln(n))} = \frac{g(w_n)}{w_n} = 1 - \frac{\ln(w_n)}{w_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1, \qquad \text{car } w_n = g^{-1}(\ln(n)) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Par conséquent,

$$\frac{v_n}{n \ln(n)} \frac{g^{-1}(\ln(n))}{\ln(n)} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$