Dérivabilité

Table des matières

1 Dérivabilité d'une fonction réelle

1.1 Définitions

Définition 1.1 : *Dérivabilité en un point*

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable en** x_0 lorsque $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.
Dans ce cas, on appelle cette limite le **nombre dérivé de** f **en** x_0 et on la note $f'(x_0)$.

Remarque 1.2 : *Taux d'accroissement*

Le rapport $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ est le **taux d'accroissement** de f entre x et x_0. Le nombre dérivé est donc la limite du taux d'accroissement quand x tend vers x_0.

On utilise très souvent le changement de variable suivant $x = x_0 + h$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Exemple 1. *Montrer que les fonctions suivantes sont dérivables en* 1 *:*

$$x \mapsto x^2, \quad x \mapsto \frac{1}{x}, \quad x \mapsto \sqrt{x}.$$

Sont-elles dérivables en 0 *?*

Solution.

Définition 1.3 : *Dérivabilité à gauche en un point*

Soit f une fonction définie sur un voisinage à gauche du point $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable à gauche en** x_0 lorsque $\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.
Dans ce cas, on appelle cette limite le **nombre dérivé à gauche de** f **en** x_0 et on la note $f'_g(x_0)$.

Définition 1.4 : *Dérivabilité à droite en un point*

Soit f une fonction définie sur un voisinage à droite du point $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable à droite en** x_0 lorsque $\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est finie.
Dans ce cas, on appelle cette limite le **nombre dérivé à droite de** f **en** x_0 et on la note $f'_d(x_0)$.

Théorème 1.5 : *Liens entre dérivabilité et dérivabilité à gauche/droite*

Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$.

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad f \text{ est dérivable à gauche et à droite en } x_0 \text{ et } f'_g(x_0) = f'_d(x_0).$$

Exemple 2. *La fonction* $f : x \mapsto |x|$ *possède une dérivée à gauche et une dérivée à droite en* 0*. On a*

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1 = f'_g(0),$$

et

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1 = f'_d(0).$$

Comme $f'_g(0) \neq f'_d(0)$*,* f *n'est pas dérivable en* 0*.*

Proposition 1.6 : *Dérivabilité implique continuité*

Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

La réciproque est fausse, comme le montre la fonction $x \mapsto |x|$ qui est continue en 0 mais non dérivable en 0.

Démonstration. Comme $\lim_{x\to x_0} x - x_0 = 0$ et $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ est finie, on montre par l'absurde que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) = 0,$$

c'est-à-dire que f est continue en x_0. □

1.2 Interprétation graphique

Dans ce paragraphe, on note C_f la courbe représentative de f.

Définition 1.7 : *Droite sécante*

On appelle **droite sécante** à C_f entre deux points M_0 et M_1 la droite reliant les points M_0 $(x_0, f(x_0))$ et M_1 $(x_1, f(x_1))$. Son équation est

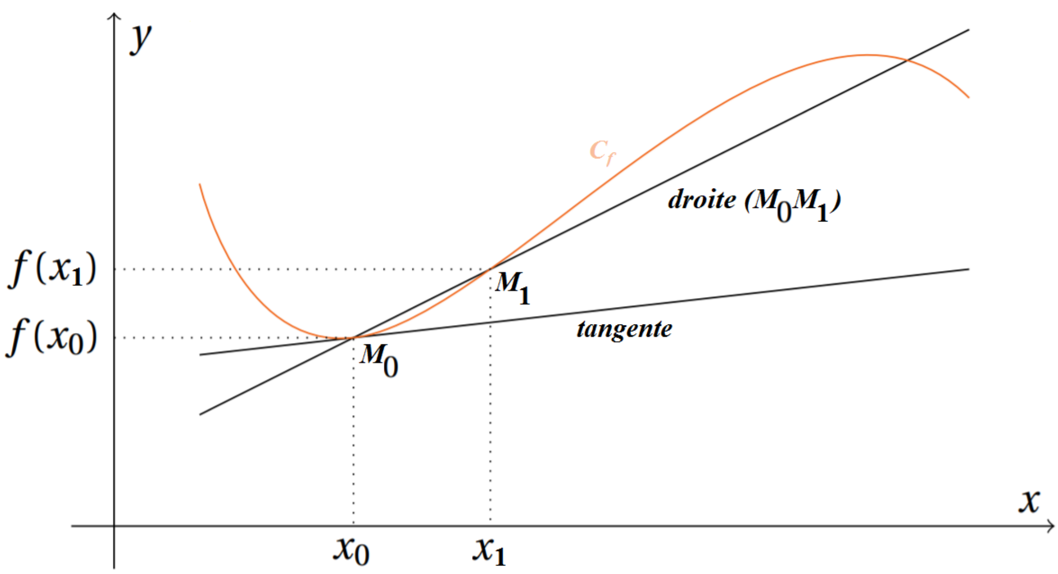
$$y = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0) + f(x_0).$$

Proposition 1.8 : *Tangente en un point*

Soit f une fonction dérivable en un point $x_0 \in \mathbb{R}$. C_f admet une tangente au point M_0 $(x_0, f(x_0))$ d'équation

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0).$$

$f'(x_0)$ représente donc la "pente limite" quand M_1 tend vers M_0, c'est-à-dire le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point M_0 $(x_0, f(x_0))$.



Proposition 1.9 : *Demi-tangente en un point*

Si f est dérivable seulement à gauche (ou à droite) de x_0, elle possède une demi-tangente à gauche (ou à droite) d'équation

$$y = f'_g(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0) \quad \text{ou} \quad y = f'_d(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0).$$

Si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 de nombres dérivés différents, on dit que $M_0\ (x_0, f(x_0))$ est un point anguleux.

Exemple 3. *Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $f(x) = |\sin(x)|$. On calcule*

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\sin(x)}{x} = -1 = f'_g(0)$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin(x)}{x} = 1 = f'_d(0)$$

Le point $(0, 0)$ est donc un point anguleux : la courbe représentative de f a une demi-tangente à gauche en 0 d'équation $y = -x$ et une demi-tangente à droite d'équation $y = x$.

Exemple 4. *La courbe représentative de la fonction valeur absolue présente un point anguleux en 0. Elle a une demi-tangente à gauche en 0 d'équation $y = -x$ et une demi-tangente à droite d'équation $y = x$.*

Proposition 1.10 : *Tangente verticale en un point*

Si $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \pm\infty$, C_f admet une tangente verticale en x_0.

Exemple 5. *La courbe représentative de la fonction racine carrée admet une tangente verticale en 0.*

1.3 Dérivabilité sur un intervalle

Définition 1.11 : *Dérivabilité sur un intervalle*

On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I si elle est dérivable en tout point de I.

Si I est de la forme $[a, b[$, $]a, b]$ ou $[a, b]$, alors f est dérivable sur I lorsqu'elle est dérivable en tout point de $]a, b[$ et dérivable à droite en a si I contient a, et à gauche en b si I contient b.

Exemple 6. *Une fonction est dérivable sur $[0, 1]$ si elle est dérivable en tout point de $]0, 1[$, dérivable à droite en 0 et à gauche en 1.*

Définition 1.12 : *Ensemble de dérivabilité*

L'ensemble des points où une fonction f est dérivable est appelé **l'ensemble de dérivabilité de** f.

Exemple 7. *La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ (mais définie sur $[0, +\infty[$).*

Définition 1.13 : *Fonction dérivée*

Soit f une fonction dérivable sur une partie I de $\mathbb{R}$. On appelle **fonction dérivée** de f l'application

$$\begin{array}{rrcl} f' : & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

Définition 1.14 : *Fonction de classe C^1*

On dit qu'une fonction f est **de classe** C^1 sur une partie I de $\mathbb{R}$ si f est dérivable sur I et si f' est continue sur I.
L'ensemble des fonctions de classe C^1 sur l'intervalle I est noté $C^1(I)$.

Théorème 1.15 : *Dérivabilité des fonctions usuelles*

Les fonctions polynomiales, fractions rationnelles, logarithme, exponentielle et fonctions trigonométriques sont dérivables (et même de classe C^1) sur leur ensemble de définition.
Les fonctions racine carrée et valeur absolue sont dérivables (et même de classe C^1) sur leur ensemble de définition sauf en 0.

Exemple 8. $x \mapsto x^5 + 3x^2 - 8$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ $\quad$ $x \mapsto \dfrac{x^3 - 5x + 1}{x - 1}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ $\quad$ $x \mapsto \log(x)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ $\quad$ $x \mapsto e^x$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$

$x \mapsto \sqrt{x}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ $\quad$ $x \mapsto |x|$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$

$x \mapsto \cos(x)$ *et* $x \mapsto \sin(x)$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ $\quad$ $x \mapsto \tan(x)$ *est dérivable sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Proposition 1.16 : *Régularité des fonctions*

Soit I un intervalle.

$$f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \quad \Rightarrow \quad f \text{ est dérivable sur } I \quad \Rightarrow \quad f \text{ est continue sur } I.$$

Attention, ces implications ne sont pas réciproques.

Exemple 9. $x \mapsto |x|$ *est continue sur* $\mathbb{R}$ *mais n'est pas dérivable sur* $\mathbb{R}$ *(non dérivable en* 0*).*

Exemple 10. *Soit* f *définie pour* $x \in \mathbb{R}$ *par*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que f *est continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$ *mais que* f *n'est pas de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$ *(*f' *discontinue en* 0*).*

Solution.

1.4 Opérations sur les dérivées

Propriété 1.17 : *Opérations sur les dérivées*

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

(i) Si $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda f + \mu g$ est dérivable sur I et

$$\forall x_0 \in I, \quad (\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0).$$

(ii) fg est dérivable sur I et

$$\forall x_0 \in I, \quad (fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

(iii) Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{g}$ est dérivable sur I et

$$\forall x_0 \in I, \quad \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

(iv) Si de plus g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I et

$$\forall x_0 \in I, \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}.$$

Démonstration. Les preuves de (i) et (iv) sont laissées en exercice.
(ii) Calculons la dérivée de fg en $x_0 \in I$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} g(x) + \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} f(x_0) \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \\
&= (fg)'(x_0).
\end{aligned}$$

Donc fg est dérivable et $(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.
(iii) Calculons la dérivée de $\dfrac{1}{g}$ en $x_0 \in I$, on a

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{g(x_0) - g(x)}{g(x)g(x_0)}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)g(x_0)} \frac{g(x_0) - g(x)}{x - x_0} \\
&= \frac{-g'(x_0)}{g(x_0)^2} \\
&= \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0).
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{1}{g}$ est dérivable et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(x_0) = -\dfrac{g'(x_0)}{g(x_0)^2}$. $\square$

Propriété 1.18 : *Composée de dérivées*

Si f est dérivable sur I à valeurs dans J et si g est dérivable sur J, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$\forall x_0 \in I, \quad (g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0).$$

Démonstration. Calculons la dérivée de $g \circ f$ en $x_0 \in I$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \times \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= g'(f(x_0)) \times f'(x_0) \quad \text{car on reconnait la dérivée de } g \text{ en } f(x_0) \\ &= (g \circ f)'(x_0). \end{aligned}$$

Ainsi $g \circ f$ est dérivable et $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$. □

Remarque 1.19 : *Dérivabilité d'une fonction donnée*

Pour démontrer qu'une fonction est dérivable sur un intervalle (ou sur son ensemble de définition), il suffit donc généralement de dire qu'elle s'obtient à partir de fonctions usuelles et de différentes opérations.

Propriété 1.20 : *Dérivabilité d'une bijection réciproque*

Si f est une fonction dérivable et bijective de I sur J telle que f' ne s'annule pas sur I, alors la fonction réciproque f^{-1} est dérivable sur J. De plus,

$$\forall y_0 \in J, \quad \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}.$$

Démonstration. On retrouve cette formule en dérivant l'égalité $f\left(f^{-1}(y_0)\right) = y_0$ pour $y_0 \in J$.

$$1 = \left(f \circ f^{-1}\right)'(y_0) = f'\left(f^{-1}(y_0)\right) \times \left(f^{-1}\right)'(y_0).$$

□

On retrouve le fait que f et f^{-1} ont les mêmes variations (théorème 2.9 du chapitre Continuité).

Exemple 11. *La fonction tangente réalise donc une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *dans* $\mathbb{R}$. *Sa bijection réciproque, la fonction arctangente, va de* $\mathbb{R}$ *dans* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. *De plus,*

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x),$$

alors d'après la propriété 1.20 pour $y \in \mathbb{R}$

$$arctan'(y) = \frac{1}{\tan'(arctan(y))} = \frac{1}{1 + (\tan(arctan(y)))^2} = \frac{1}{1 + y^2}.$$

1.5 Dérivées des fonctions usuelles

Toutes les fonctions suivantes sont dérivables sur leur ensemble de définition à l'exception des fonctions $x \mapsto x^a$ avec $0 < a < 1$ (donc en particulier de la fonction racine carrée) qui ne sont pas dérivables en 0 (mais qui sont définies et continues en 0). Il faut connaître les dérivées suivantes :

$f(x)$	x^a $(a \in \mathbb{R})$	$\ln(x)$	e^x	a^x $(a > 0)$	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\arctan(x)$
$f'(x)$	$a\,x^{a-1}$	$\dfrac{1}{x}$	e^x	$a^x \ln(a)$	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$1+\tan^2(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$

Grâce à la propriété 1.18, on en déduit les formules analogues pour dériver des fonctions composées. Si u est une fonction dérivable alors :

$f(x)$	$u(x)^a$ $(a \in \mathbb{R})$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	$e^{u(x)}$	$\sin(u(x))$	$\cos(u(x))$	$\arctan(u(x))$
$f'(x)$	$a\,u'(x)\ (u(x))^{a-1}$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$u'(x)\,e^{u(x)}$	$u'(x)\ \cos(u(x))$	$-u'(x)\ \sin(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$

On peut également résumer les résultats de la propriété 1.17. Si u et v sont des fonctions dérivables alors :

$f(x)$	$u(x)+v(x)$	$\lambda\,u(x)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$	$u(x)\,v(x)$	$\dfrac{1}{v(x)}$	$\dfrac{u(x)}{v(x)}$
$f'(x)$	$u'(x)+v'(x)$	$\lambda\,u'(x)$	$u'(x)\,v(x)+u(x)\,v'(x)$	$-\dfrac{v'(x)}{v(x)^2}$	$\dfrac{u'(x)\,v(x)-u(x)\,v'(x)}{v(x)^2}$

Exemple 12. *Calculer la dérivée des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = e^{\sin(x)} \qquad \textit{et} \qquad g(x) = \mathit{arctan}\left(x^2\right)$$

Solution.

2 Applications de la notion de dérivabilité

2.1 Extrema

Définition 2.1 : *Extremum : rappel*

Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in A$. On dit que f admet

- **un maximum global** sur A en x_0 lorsque

$$\forall x \in A, \quad f(x) \leq f(x_0),$$

  on note alors $f(x_0) = \max\limits_{x \in A} f(x)$.

- **un maximum local** sur A en x_0 lorsqu'il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$\forall x \in A \cap V, \quad f(x) \leq f(x_0),$$

- **un minimum global** sur A en x_0 lorsque

$$\forall x \in A, \quad f(x) \geq f(x_0),$$

  on note alors $f(x_0) = \min\limits_{x \in A} f(x)$.

- **un minimum local** sur A en x_0 lorsqu'il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$\forall x \in A \cap V, \quad f(x) \geq f(x_0).$$

Un **extremum** est un maximum ou un minimum.

Proposition 2.2 : *Condition nécessaire d'extremum local*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I.

$$f \text{ admet un extremum local en } x_0 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = 0.$$

Démonstration. On suppose que f admet un maximum local en x_0, le cas d'un minimum local étant entièrement symétrique. Cela signifie qu'il existe un voisinage V de x_0 tel que

$$\forall x \in I \cap V, \quad f(x) \leq f(x_0).$$

On en déduit que $\forall x \in I \cap V, \quad f(x) - f(x_0) \leq 0$, puis que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ si } x < x_0 \quad \text{et} \quad \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ si } x > x_0.$$

Comme f est dérivable en x_0, sa dérivée à gauche existe en x_0 et est égal à sa dérivée en x_0. Par passage à la limite dans l'inégalité,

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'_g(x_0) \geq 0.$$

De même, pour la dérivée à droite, on obtient $f'_d(x_0) \leq 0$. Cela donne finalement $f'(x_0) = 0$. □

Exemple 13. *Cette condition est une condition nécessaire mais non suffisante : la dérivée de la fonction* $x \mapsto x^3$ *s'annule en* 0 *mais la fonction n'y admet pas d'extremum local.*

De plus, si l'intervalle considéré n'est pas ouvert, le résultat de cette proposition tombe en défaut.

Exemple 14. *On considère*

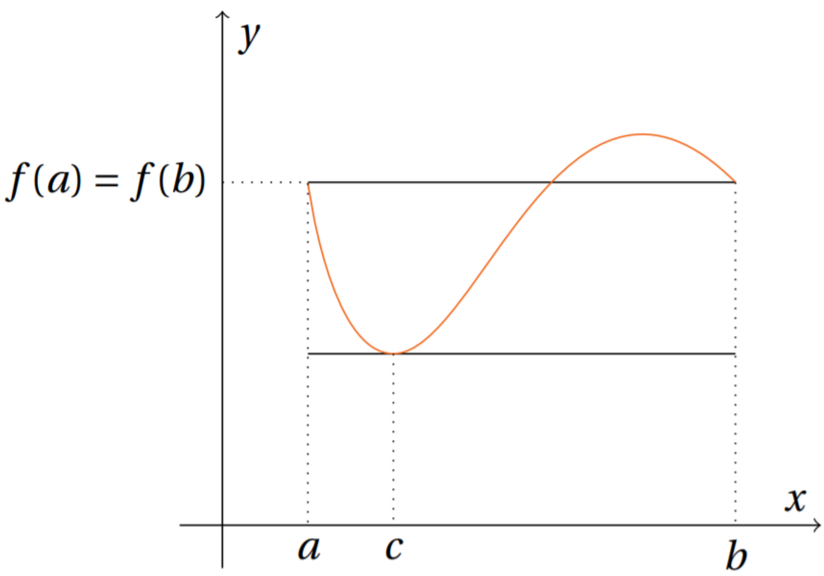
$$\begin{array}{rcl} f : [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

f *atteint son maximum en* 1 *et pourtant* $f'(1) = 1 \neq 0$.

Quand on recherche les extrema locaux d'une fonction, la proposition 2.2 donne donc seulement les points candidats à être des extrema locaux (ceux où la dérivée s'annule et que l'on appelle des points critiques).

2.2 Théorème de Rolle

Si une fonction continue vérifie la condition $f(a) = f(b)$, on "observe" qu'elle possèdera au moins un extremum local entre a et b.



Théorème 2.3 : *Théorème de Rolle*

Soient $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et que $f(a) = f(b)$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

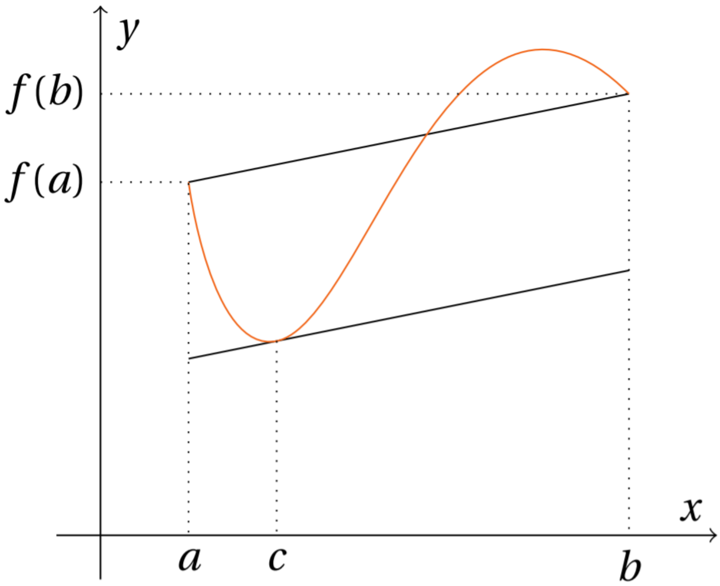
Le réel c n'est pas nécessairement unique.

Démonstration. Comme f est continue sur $[a, b]$, d'après le théorème des bornes (voir chapitre Continuité), f atteint son maximum ou son minimum en un $c \in [a, b]$.

- Si $c \in]a, b[$, alors on conclut via la proposition 2.2 (car $]a, b[$ est un intervalle ouvert).
- Si $c = a$ ou $c = b$, comme $f(a) = f(b)$, cela signifie que f est constante sur $[a, b]$ et en conséquence $f'(x) = 0$ pour $x \in [a, b]$.

□

2.3 Théorème des accroissements finis



Théorème 2.4 : *Théorème des accroissements finis*

Soient $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$. On suppose que f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Démonstration. On considère la fonction

$$\begin{array}{rccl} g : & [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \end{array}$$

On calcule

$$g(a) = f(a) \quad \text{et} \quad g(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(a).$$

g est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et vérifie $g(a)=g(b)$. On peut donc appliquer le théorème de Rolle à g et il existe $c\in]a,b[$ tel que $g'(c)=0$. Or pour tout $x\in]a,b[$,

$$g'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Ainsi

$$g'(c)=0=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\quad \text{donc}\quad f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

□

Corollaire 2.5 : *Inégalité des accroissements finis*

Soit f une fonction dérivable sur I. S'il existe un réel k tel que

$$\forall x\in I,\quad |f'(x)|\leq k,$$

alors

$$\forall (a,b)\in I^2,\quad |f(b)-f(a)|\leq k|b-a|.$$

Démonstration. Soit $(a,b)\in I^2$ avec $a<b$ (le cas $a=b$ n'a pas d'intérêt). f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Ainsi d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Comme $\forall x\in I$, $|f'(x)|\leq k$, on obtient alors en $c\in I$

$$|f'(c)|=\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\leq k\quad \text{donc}\quad |f(b)-f(a)|\leq k|b-a|.$$

□

Théorème 2.6 : *Application aux suites récurrentes (hors programme)*

Soient f une fonction dérivable sur un intervalle I tel que $f(I)\subset I$ et l un point fixe de f appartenant à I. Soit (u_n) la suite récurrente définie par $u_0\in I$ donné et pour $n\in\mathbb{N}$,

$$u_{n+1}=f(u_n).$$

S'il existe $k>0$ tel que

$$\forall x\in I,\quad |f'(x)|\leq k<1,$$

alors (u_n) converge vers l.

Démonstration. D'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall n\in\mathbb{N}, |u_{n+1}-l|=|f(u_n)-f(l)|\leq k\ |u_n-l|\,.$$

Ainsi par une récurrence facile,

$$\forall n\in\mathbb{N}, |u_n-l|\leq k^n\ |u_0-l|\,.$$

Comme $k\in]0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} k^n=0$. D'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty}|u_n-l|=0.$$

(u_n) converge bien vers l. □

Exemple 15. *Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

1. *Montrer que l'équation $x^2 + x - 1 = 0$ a une seule solution α dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et préciser sa valeur.*
2. *Montrer que*
$$f\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) \subset \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$
3. *En déduire que pour $n \in \mathbb{N}$,*
$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1.$$
4. *Montrer que pour $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$,*
$$|f'(x)| \leq \frac{4}{9}.$$
5. *Montrer que (u_n) converge et préciser sa limite.*

Solution.

2.4 Dérivée et variations

Théorème 2.7 : *Lien entre dérivée et monotonie*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

(i) $\forall x \in I, \quad f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ est croissante sur I.

(ii) $\forall x \in I, \quad f'(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ est décroissante sur I.

(iii) $\forall x \in I, \quad f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f$ est constante sur I.

Démonstration. On montre uniquement (i), la démonstration pour (ii) est alors totalement symétrique et (iii) est une conséquence de (i) et (ii).

Pour montrer (i), on raisonne par double implication.

$\Leftarrow$ On suppose que f est croissante sur I. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x \neq y$. Comme f est croissante, $f(y) - f(x)$ est du même signe que $y - x$. Ainsi

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

Comme f est dérivable en tout $x \in I$,

$$\lim_{y \to x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(x) \geq 0.$$

Par conséquent, $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$.

$\Rightarrow$ On suppose que f' est positive sur I. Soit $(x, y) \in I^2$ tel que $x < y$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, y[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq 0.$$

Ainsi, comme $f'(c) \geq 0$ et $y - x > 0$,

$$f'(c)\ (y - x) = f(y) - f(x) \geq 0 \quad \text{donc} \quad f(y) \geq f(x).$$

On en conclut que f est croissante sur I. □

Exemple 16. *Montrer que pour $x \in \mathbb{R}^*$,*

$$\mathit{arctan}(x) + \mathit{arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Solution.

Théorème 2.8 : *Lien entre dérivée et stricte monotonie*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

(i) $\forall x \in I, \quad f'(x) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ est strictement croissante sur I.

(ii) $\forall x \in I, \quad f'(x) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ est strictement décroissante sur I.

Démonstration. On montre (i). On suppose que $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$. Par le théorème précédent, cela signifie que f est croissante. On raisonne par l'absurde : si f n'est pas strictement croissante, alors cela signifie qu'il existe a et b dans I tels que

$$a < b \quad \text{et} \quad f(a) = f(b).$$

D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a, b[\subset I$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Ce qui est absurde car $\forall x \in I$, $f'(x) > 0$. f est donc strictement croissante.
La proposition (ii) se montre de manière analogue. $\square$

Remarque 2.9 : *Lien entre dérivée et stricte monotonie*

Si $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$ et f' ne s'annule qu'un nombre fini de fois sur I, alors f est strictement croissante sur I (idem pour la décroissance).

Exemple 17. *La fonction définie par* $f : x \mapsto x^3$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *de dérivée* $f'(x) = 3x^2$*. Elle est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *car* $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) > 0$ *et pourtant* $f'(0) = 0$.

2.5 Théorème de prolongement de la dérivée

Théorème 2.10 : *Théorème de prolongement de la dérivée*

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On suppose que f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ et que

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = l.$$

Alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$. De plus, f' est continue en x_0.

Démonstration. Soit $x \in I \setminus \{x_0\}$. f est continue sur $[x_0, x]$ (si $x_0 < x$, sinon on considère $[x, x_0]$) et dérivable sur $]x_0, x[$. On peut donc appliquer le théorème des accroissements finis et il existe alors $c_x \in]x_0, x[$ tel que

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_x).$$

Comme $\lim\limits_{x \to x_0} c_x = x_0$ et $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = l$, alors

$$\lim_{x \to x_0} f'(c_x) = l.$$

Ainsi

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l.$$

f est donc dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$. Comme $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$, f' est continue en x_0. $\square$

Corollaire 2.11 : *Théorème de prolongement de la dérivée (version C^1)*

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On suppose que f est continue sur I, de classe C^1 sur $I \setminus \{x_0\}$ et que

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = l.$$

Alors f est de classe C^1 sur I et $f'(x_0) = l$.

Exemple 18. *Soit f définie pour $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$. Montrer que f est prolongeable en une fonction C^1 sur $\mathbb{R}$.*

Solution.