1 Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. Une autre écriture de l'espérance

Soit X une une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k)\right) - n\mathbb{P}(X>n).$$
2. On suppose que X admet une espérance.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$0 \leq n\,\mathbb{P}(X>n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}(X=k).$$
   (b) En déduire que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X>k)$ converge et que
   $$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k).$$
3. Réciproquement, on suppose que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X>k)$ converge. Montrer que X admet une espérance et que
$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k).$$
4. Application : On lance un dé équilibré à 6 faces jusqu'à obtenir un 6. Soit X le nombre de lancers nécessaires, calculer l'espérance de X.

Exercice 2. Etude d'une loi de Poisson

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que la suite $(\mathbb{P}(X=k))$ soit décroissante.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{N}$ la probabilité $\mathbb{P}(X=k)$ est maximale ?

2 Compléments sur les espaces vectoriels

Exercice 3. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, somme

On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$v_1 = (1,2,3,4), \quad v_2 = (1,1,1,3), \quad v_3 = (2,1,1,1), \quad v_4 = (-1,0,-1,2), \quad v_5 = (2,3,0,1).$$

Soient $F = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2, v_3)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(v_4, v_5)$, calculer les dimensions respectives de F, G, $F \cap G$ et $F + G$.

Exercice 4. Espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle

1. Montrer que l'ensemble $E = \left\{f \in C^2(\mathbb{R}) \text{ telles que } f'' = 2f' - f\right\}$ est un espace vectoriel.
2. Vérifier que les fonctions $g_0 : x \mapsto e^x$ et $g_1 : x \mapsto xe^x$ forment une famille libre de E.
3. Soit $f \in E$. On pose $h : x \mapsto f(x)e^{-x}$. Calculer h''. En déduire l'expression de h, puis de f.
4. En déduire une base et la dimension de E.

3 Applications linéaires

Exercice 5. Rang d'une application linéaire

Soit E et F de dimensions finies et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que
$$\mathrm{rg}(u+v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$
2. En déduire que
$$|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leq \mathrm{rg}(u+v).$$

Exercice 6. Sommes directes de noyaux

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - Id)$ et $\mathrm{Ker}(f + Id)$ sont en somme directe.

4 Matrices et applications linéaires

Exercice 7. Utilisation de l'endomorphisme canoniquement associée

On définit
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant l'endomorphisme canoniquement associée de $\mathbb{R}^n$, calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Projecteur

Soit E un espace vectoriel et f un projecteur de E.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
2. Supposons que E soit de dimension finie n. On note r le rang de f. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que :
$$f(e_i) = \begin{cases} e_i \text{ si } i \leq r \\ 0_E \text{ si } i > r. \end{cases}$$
3. Déterminer la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$.

5 Intégrales impropres

Exercice 9. Intégrale deux fois impropre

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$$

1. On rappelle que $\ln(2) \approx 0{,}7$ et $\ln(3) \approx 1{,}1$.

   Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ possède une unique solution notée α et que : $\dfrac{1}{3} < \alpha < \dfrac{1}{2}$
2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leqslant \alpha \end{cases}$$
   (a) Montrer que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.

   (c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument. On note alors $E = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$.

(d) Démontrer que pour tout $t > \alpha$: $\quad t f(t) = \varphi'(t) + \dfrac{1}{t^2}$

En déduire la valeur de E, puis donner un encadrement de E par deux entiers consécutifs.

(e) L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ?