1 Variables aléatoires discrètes

Exercice 1. Une autre écriture de l'espérance

Soit X une une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k)\right) - n\mathbb{P}(X>n).$$

Raisonnons par récurrence. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition :

$$"\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k)\right) - n\mathbb{P}(X>n)"$$

Initialisation : *Comme $0\,\mathbb{P}(X=0)+1\,\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X>0)-1\mathbb{P}(X>1)$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.*
Hérédité : *On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel non nul n fixé. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.*
On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k\,\mathbb{P}(X=k) &= (n+1)\,\mathbb{P}(X=n+1) + \sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k) \\
&= (n+1)\,\mathbb{P}(X=n+1) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k)\right) - n\mathbb{P}(X>n) \quad \textit{par hypothèse de récurrence} \\
&= (n+1)\big(\mathbb{P}(X>n)-\mathbb{P}(X>n+1)\big) + \left(\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X>k)\right) - n\mathbb{P}(X>n) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}(X>k)\right) - (n+1)\,\mathbb{P}(X>n+1)
\end{aligned}$$

donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : *D'après le principe de récurrence, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.*

2. On suppose que X admet une espérance.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq n\,\mathbb{P}(X>n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}(X=k).$$

On a pour $n \in \mathbb{N}$

$$[X>n] = \bigcup_{k=n+1}^{+\infty} [X=k].$$

Cette union étant disjointe, on a

$$\mathbb{P}(X>n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k).$$

De plus, comme X admet une espérance alors $\sum_{k\geq n+1} k\mathbb{P}(X=k)$ converge et si $k \geq n+1$, alors

$$n\mathbb{P}(X=k) \leq k\mathbb{P}(X=k),$$

ainsi

$$0 \leq n\,\mathbb{P}(X>n) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,\mathbb{P}(X=k).$$

   (b) En déduire que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(X>k)$ converge et que

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X>k).$$

Si X admet une espérance, alors on a la convergence du reste vers 0

$$\sum_{k\geq n+1} k\mathbb{P}(X=k) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

D'après le théorème d'encadrement et la question précédente on en conclut que

$$n\,\mathbb{P}(X>n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, dans l'égalité de la question 1. on obtient :

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k).$$

3. Réciproquement, on suppose que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X>k)$ converge. Montrer que X admet une espérance et que

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k).$$

Comme la série $\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X>k)$ est à termes positifs et convergente alors pour $n\in\mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X>k)\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k).$$

D'après la question 1, comme $n\mathbb{P}(X>n)\geq 0$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k)\leq\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}(X>k)\leq\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k).$$

Ainsi la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} k\,\mathbb{P}(X=k)\right)_{n\geq 1}$ est une suite croissante et majorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, $\sum_{k\in\mathbb{N}} k\,\mathbb{P}(X=k)$ converge, X admet donc une espérance. On est donc dans les hypothèses de la question 2.(a), on en conclut alors d'après la question 2.(b) que

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k).$$

4. Application : On lance un dé équilibré à 6 faces jusqu'à obtenir un 6. Soit X le nombre de lancers nécessaires, calculer l'espérance de X.
On note l'événement A_i "on n'obtient pas de 6 au i-ème lancer". Ainsi pour $k\in\mathbb{N}$

$$[X>k]=\bigcap_{i=1}^{k} A_i.$$

Par indépendance des lancers, on a alors

$$\mathbb{P}(X>k)=\prod_{i=1}^{k}\mathbb{P}(A_i)=\left(\frac{5}{6}\right)^k.$$

De plus, $\sum_{k\in\mathbb{N}}\mathbb{P}(X>k)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\left(\frac{5}{6}\right)^k$ est une série géométrique convergente car $\left|\frac{5}{6}\right|<1$. D'après la question 3, on en conclut que X admet une espérance et

$$E(X)=\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(X>k)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{5}{6}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{5}{6}}=6.$$

Exercice 2. Etude d'une loi de Poisson

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que la suite $(\mathbb{P}(X=k))$ soit décroissante.

On a pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(X=k) = e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Ainsi

$$\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)} = \frac{e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{k+1}}{(k+1)!}}{e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^k}{k!}.} = \frac{\lambda}{k+1}.$$

or la suite $(\mathbb{P}(X=k))$ soit décroissante si et seulement si $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)} \leq 1$. On a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \lambda \leq k+1 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \in [0,1].$$

Ainsi la suite $(\mathbb{P}(X=k))$ soit décroissante si et seulement si $\lambda \in [0,1]$.

2. Pour quelle(s) valeur(s) de $k \in \mathbb{N}$ la probabilité $\mathbb{P}(X=k)$ est maximale ?

- *Si $\lambda \leq 1$, d'après la question précédente, la valeur maximale de $\mathbb{P}(X=k)$ est atteinte en $k=0$.*
- *Si $\lambda > 1$,*

$$\frac{\mathbb{P}(X=k+1)}{\mathbb{P}(X=k)} = \frac{\lambda}{k+1} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad k \leq \lambda - 1.$$

On remarque donc que les variations de $(\mathbb{P}(X=k))$ changent lorsque k dépasse $\lambda-1$, ainsi la valeur maximale de $\mathbb{P}(X=k)$ est atteinte en $k = \lfloor\lambda\rfloor - 1$ ou $k = \lfloor\lambda\rfloor$. Comparons $\mathbb{P}\left(X = \lfloor\lambda\rfloor - 1\right)$ et $\mathbb{P}\left(X = \lfloor\lambda\rfloor\right)$

$$\mathbb{P}\left(X=\lfloor\lambda\rfloor-1\right) \leq \mathbb{P}\left(X=\lfloor\lambda\rfloor\right) \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{\lfloor\lambda\rfloor-1}}{(\lfloor\lambda\rfloor-1)!} \leq e^{-\lambda}\,\frac{\lambda^{\lfloor\lambda\rfloor}}{\lfloor\lambda\rfloor!} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda} \leq \frac{1}{\lfloor\lambda\rfloor} \quad \Leftrightarrow \quad \lfloor\lambda\rfloor \leq \lambda.$$

On peut en conclure que le maximum est atteint en $k = \lfloor\lambda\rfloor$.

2 Compléments sur les espaces vectoriels

Exercice 3. Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$, somme

On considère, dans $\mathbb{R}^4$, les vecteurs :

$$v_1 = (1,2,3,4), \quad v_2 = (1,1,1,3), \quad v_3 = (2,1,1,1), \quad v_4 = (-1,0,-1,2), \quad v_5 = (2,3,0,1).$$

Soient $F = \mathrm{Vect}\,(v_1,v_2,v_3)$ et $G = \mathrm{Vect}\,(v_4,v_5)$, calculer les dimensions respectives de F, G, $F\cap G$ et $F+G$.

On montre facilement que la famille (v_1,v_2,v_3) est libre, ainsi $\dim(F)=3$. Comme v_4 et v_5 ne sont pas colinéaires alors (v_4,v_5) est une famille libre et $\dim(G)=2$.

Déterminons $F\cap G$. Soit $X \in F\cap G$, puisque $X\in F$ alors il existe x,y,z des réels tels que

$$X = xv_1 + yv_2 + zv_3.$$

puisque $X \in G$ alors il existe a,b des réels tels que

$$X = av_4 + bv_5.$$

Ainsi

$$xv_1+yv_2+zv_3 = av_4+bv_5 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2z=-a+2b \\ 2x+y+z=3b \\ 3x+y+z=-a \\ 4x+3y+z=2a+b \end{cases} \underset{i\in[\![2,4]\!],\, L_i\leftarrow L_i - i\,L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+2z=-a+2b \\ -y-3z=2a-b \\ -2y-5z=2a-6b \\ -y-7z=6a-7b \end{cases}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+2z=-a+2b \\ -y-3z=2a-b \\ z=-2a-4b \\ -y-7z=6a-7b \end{cases} \underset{L_4\leftarrow L_4-L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+2z=-a+2b \\ -y-3z=2a-b \\ z=-2a-4b \\ -4z=4a-6b \end{cases} \underset{L_4\leftarrow L_4+4L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x+y+2z=-a+2b \\ -y-3z=2a-b \\ z=-2a-4b \\ 0=-4a-22b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=5b \\ y=-9b \\ z=7b \\ 2a=-11b \end{cases}$$

Donc comme $2a = -11b$ *alors*

$$F \cap G = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{11}{2}b + 2b \\ 3b \\ \frac{11}{2}b \\ -11b + b \end{pmatrix} \text{ avec } b \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \frac{b}{2} \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 11 \\ -20 \end{pmatrix} \text{ avec } b \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 11 \\ -20 \end{pmatrix}.$$

Comme $\begin{pmatrix} 15 \\ 6 \\ 11 \\ -20 \end{pmatrix}$ *est non nul, alors* $\dim(F \cap G) = 1$. *De plus, d'après la formule de Grassmann, on a*

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) = 3 + 2 - 1 = 4.$$

$F + G$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^4$ *de dimension* 4, *donc*

$$F + G = \mathbb{R}^4.$$

Exercice 4. Espace vectoriel des solutions d'une équation différentielle

1. Montrer que l'ensemble $E = \left\{ f \in C^2(\mathbb{R}) \text{ telles que } f'' = 2f' - f \right\}$ est un espace vectoriel.

   Montrons que E *est un sous-espace vectoriel de* $C^2(\mathbb{R})$.

   (i) Par définition, $E \subset C^2(\mathbb{R})$.

   (ii) La fonction nulle vérifie $f'' = 2f' - f$, *donc elle appartient à* E.

   (iii) $\forall f, g \in E$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *montrons que* $\lambda f + \mu g \in E$. *En effet, par linéarité de la dérivation*

   $$(\lambda f + \mu g)'' = \lambda f'' + \mu g'' = \lambda(2f' - f) + \mu(2g' - g) = 2(\lambda f + \mu g)' - (\lambda f + \mu g).$$

   Donc E *est stable par combinaison linéaire.*

   E *est un sous-espace vectoriel de* $C^2(\mathbb{R})$, *donc un espace vectoriel.*

2. Vérifier que les fonctions $g_0 : x \mapsto e^x$ et $g_1 : x \mapsto xe^x$ forment une famille libre de E.

   g_0 *et* g_1 *ne sont pas colinéaires, il n'y a pas de rapport de proportionnalité entre eux.*

3. Soit $f \in E$. On pose $h : x \mapsto f(x)e^{-x}$. Calculer h''. En déduire l'expression de h, puis de f.

   h *est de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}$ *et pour* $x \in \mathbb{R}$, *d'après la formule de Leibniz*

   $$h''(x) = \left(f''(x) - 2f'(x) + f(x)\right) e^{-x} = 0 \qquad \textit{car } f \in E.$$

   Donc h *est une fonction affine, il existe* a *et* b *deux réels tels que pour* $x \in \mathbb{R}$

   $$h(x) = ax + b.$$

   Ainsi

   $$f(x) = (ax + b)\, e^x = ag_1(x) + bg_0(x).$$

4. En déduire une base et la dimension de E.

   D'après la question précédente, on a donc

   $$E = \left\{ ag_1 + bg_0 \textit{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{Vect}\,(g_0, g_1)\,.$$

   Comme (g_0, g_1) *est une famille libre (question 2), elle forme donc une base de* E *et donc* $\dim(E) = 2$.

3 Applications linéaires

Exercice 5. Rang d'une application linéaire

Soit E et F de dimensions finies et $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. Montrer que

   $$\mathrm{rg}(u + v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v).$$

   Montrons que $\mathrm{Im}(u + v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$. *Si* $y \in \mathrm{Im}(u + v)$ *alors il existe* $x \in E$ *tel que*

   $$y = (u + v)(x) = \underbrace{u(x)}_{\in \mathrm{Im}(u)} + \underbrace{v(x)}_{\in \mathrm{Im}(v)}.$$

Ainsi $y \in \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$ *et* $\mathrm{Im}(u+v) \subset \mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)$. *Ainsi*

$$rg(u+v) = \dim(\mathrm{Im}(u+v)) \leq \dim(\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)).$$

Or d'après la formule de Grassmann,

$$\dim(\mathrm{Im}(u) + \mathrm{Im}(v)) = \dim(\mathrm{Im}(v)) + \dim(\mathrm{Im}(v)) - \dim(\mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Im}(v)) \leq rg(u) + rg(v).$$

On en conclut que

$$rg(u+v) \leq rg(u) + rg(v).$$

2. En déduire que

$$|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)| \leq \mathrm{rg}(u+v).$$

On réécrit la question précédente avec $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$

$$rg(f+g) \leq rg(f) + rg(g).$$

En posant $f = u + v$ *et* $g = -v$, *comme* $rg(v) = rg(-v)$, *on a*

$$rg(u) \leq rg(u+v) + rg(v) \quad \Leftrightarrow \quad rg(u) - rg(v) \leq rg(u+v).$$

De même en posant $f = u + v$ *et* $g = -u$, *on obtient*

$$rg(v) \leq rg(u+v) + rg(u) \quad \Leftrightarrow \quad rg(v) - rg(u) \leq rg(u+v).$$

Ainsi

$$|rg(u) - rg(v)| \leq rg(u+v).$$

Exercice 6. Sommes directes de noyaux

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - Id)$ et $\mathrm{Ker}(f + Id)$ sont en somme directe.

Montrons d'abord que $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Ker}(f - Id)$ *sont en somme directe. Soit* $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f - Id)$ *alors*

$$f(x) = 0_E \text{ et } f(x) = x.$$

Ainsi $x = 0_E$, *donc* $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f - Id) = \{0_E\}$. $\mathrm{Ker}(f)$ *et* $\mathrm{Ker}(f - Id)$ *sont en somme directe.*

Montrons que $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - Id)$ *et* $\mathrm{Ker}(f + Id)$ *sont en somme directe. Soit* $x \in (\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - Id)) \cap \mathrm{Ker}(f + Id)$ *alors il existe* $y \in \mathrm{Ker}(f)$ *et* $z \in \mathrm{Ker}(f - Id)$ *tel que*

$$x = y + z \text{ et } f(x) = -x.$$

Ainsi

$$f(y+z) = -(y+z) \quad \Leftrightarrow \quad z = -y - z \quad \Leftrightarrow \quad 2z = -y.$$

Donc y *et* z *appartiennent à* $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f - Id)$, *ainsi* $y = z = 0_E$ *et donc* $x = 0_E$. *On en conclut que*

$$\big(\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f - Id)\big) \oplus \mathrm{Ker}(f + Id) = E.$$

4 Matrices et applications linéaires

Exercice 7. Utilisation de l'endomorphisme canoniquement associée

On définit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \iddots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \iddots & \iddots & \vdots \\ 0 & 1 & \iddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant l'endomorphisme canoniquement associée de $\mathbb{R}^n$, calculer A^p pour $p \in \mathbb{N}$.

Nous associons à la matrice A *son endomorphisme canoniquement associée* f. *Si* $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *est la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *alors* $f(e_1)$ *est donné par le premier vecteur colonne,* $f(e_2)$ *par le deuxième... Donc ici*

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_n, \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_{n-1} \quad \text{de manière générale on a} \quad \forall i \in [\![1, n]\!],\ f(e_i) = e_{n+1-i}.$$

Calculons ce que vaut la composition $f \circ f$. Comme une application linéaire est déterminée par les images des éléments d'une base alors on calcule $f \circ f(e_i)$, en appliquant deux fois la formule précédente :

$$f \circ f(e_i) = f\left(f(e_i)\right) = f(e_{n+1-i}) = e_{n+1-(n+1-i)} = e_i.$$

Comme $f \circ f$ laisse invariant tous les vecteurs de la base alors pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$f \circ f(x) = x.$$

Donc $f \circ f = Id$ On en déduit $f^{-1} = f$ et que la composition itérée vérifie

$$f^p = \begin{cases} Id & \text{si } p \text{ est pair,} \\ f & \text{si } p \text{ est impair.} \end{cases}$$

On peut donc conclure que

$$A^p = \begin{cases} I & \text{si } p \text{ est pair,} \\ A & \text{si } p \text{ est impair.} \end{cases}$$

Exercice 8. Projecteur

Soit E un espace vectoriel et f un projecteur de E.

1. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.
   On a vu cette démonstration dans le chapitre Applications linéaires. Soit $x \in E$, on a
   $$x = \underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im}(f)} + \underbrace{x - f(x)}_{\in \mathrm{Ker}(f)}.$$
   En effet, $f\left(x - f(x)\right) = f(x) - f^2(x) = 0_E$. Ainsi $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Ker}(f)$.
   Montrons que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\}$. Si $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, alors $x = f(z)$ avec $z \in E$ et $f(x) = 0_E$. D'où
   $$0_E = f(x) = f^2(z) = f(z) = x.$$
   On a bien $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$.
2. Supposons que E soit de dimension finie n. On note r le rang de f. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que :
   $$f(e_i) = \begin{cases} e_i \text{ si } i \leq r \\ 0_E \text{ si } i > r. \end{cases}$$
   $\mathrm{Im}(f)$ est donc de dimension r. Soient $(e_1, \ldots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $(e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(f)$. Comme $E = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ alors par concaténation des bases $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Pour $i > r$ alors $e_i \in \mathrm{Ker}(f)$ donc
   $$f(e_i) = 0_E.$$
   Pour $x \in \mathrm{Im}(f)$, il existe $x' \in E$ tel que $x = f(x')$ et comme $f \circ f = f$
   $$f(x) = f(f(x')) = f(x') = x.$$
   En particulier si $i \leq r$ alors
   $$f(e_i) = e_i.$$
   Pour résumer, on a bien
   $$f(e_i) = \begin{cases} e_i \text{ si } i \leq r \\ 0_E \text{ si } i > r. \end{cases}$$
3. Déterminer la matrice de f dans cette base $\mathcal{B}$.
   On note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$, alors
   $$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} I_r & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{pmatrix}$$

5 Intégrales impropres

Exercice 9. Intégrale deux fois impropre

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$$

1. On rappelle que $\ln(2) \approx 0{,}7$ et $\ln(3) \approx 1{,}1$.
   Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ possède une unique solution notée α et que : $\quad \dfrac{1}{3} < \alpha < \dfrac{1}{2}$

   On a les limites suivantes

   $$\varphi(x) = -\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0,$$

   comme $x\ln(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ *par croissance comparée,*

   $$\varphi(x) = \frac{x\ln(x) + 1}{x} - \ln(x+1) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

   φ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et pour* $x > 0$

   $$\varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x^2} = \frac{x(x+1) - x^2 - (x+1)}{x^2(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)} < 0.$$

   φ *est continue et strictement décroissante de* $\mathbb{R}_+^*$ *dans* $\mathbb{R}_+^*$. *Comme* $1 \in \mathbb{R}_+^*$, *d'après le théorème de la bijection monotone l'équation* $\varphi(x) = 1$ *possède une unique solution notée* α *sur* $\mathbb{R}_+^*$. *De plus,*

   $$\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = -\ln(1+3) + 3 = 3 - 2\ln(2) \approx 3 - 1{,}4 \approx 1{,}6 > 1 \qquad \textit{et} \qquad \varphi\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(1+2) + 2 \approx 2 - 1{,}1 \approx 0{,}9 < 1.$$

   Ainsi

   $$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) < \varphi(\alpha) < \varphi\left(\frac{1}{3}\right),$$

   comme φ *est strictement décroissante sur* $\mathbb{R}_+^*$

   $$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}.$$

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x^2(x+1)} & \text{si } x > \alpha \\ f(x) = 0 & \text{si } x \leqslant \alpha \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   f *est continue sur* $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$. *De plus,* f *est continue à gauche en* α *et si* $x > \alpha$

   $$f(x) = \frac{1}{x^2(x+1)} \underset{x\to\alpha^+}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha^2(\alpha+1)} \in \mathbb{R}.$$

   f *admet une limite finie à droite en* α. f *est continue par morceaux sur* $\mathbb{R}$.

   (b) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et donner sa valeur.
   f *est nulle sur* $]-\infty, \alpha[$, *ainsi*

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   f *est continue sur* $]\alpha, +\infty[$ *et admet une limite finie à droite en* α, *donc* $\displaystyle\int_{\alpha}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *est impropre en* $+\infty$.
   Soit $A > \alpha$,

   $$\int_{\alpha}^{A} f(t)\,\mathrm{d}t = [-\varphi(t)]_{t=\alpha}^{A} = -\varphi(A) + \varphi(\alpha) = 1 - \varphi(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

   Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge et vaut* 1.

(c) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument. On note alors $E = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

f est nulle sur $]-\infty,\alpha[$ et $\alpha > 0$, ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus,

$$tf(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^2}.$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,dt$ *converge, d'après le critère de comparaison par équivalence* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$ *converge absolument.*

(d) Démontrer que pour tout $t > \alpha$: $\quad tf(t) = \varphi'(t) + \dfrac{1}{t^2}$

En déduire la valeur de E, puis donner un encadrement de E par deux entiers consécutifs.

Pour tout $t > \alpha$,

$$\varphi'(t) + \frac{1}{t^2} = \frac{-1}{t^2(t+1)} + \frac{1}{t^2} = \frac{-1+t+1}{t^2(t+1)} = \frac{1}{t(t+1)} = tf(t).$$

Ainsi en intégrant entre α et A

$$\int_\alpha^A tf(t)\,dt = \int_\alpha^A \left(\varphi'(t) + \frac{1}{t^2}\right)\,dt = \left[\varphi(t) - \frac{1}{t}\right]_{t=\alpha}^{A} = \varphi(A) - \frac{1}{A} - \varphi(\alpha) + \frac{1}{\alpha} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha} - 1.$$

Donc $E = \dfrac{1}{\alpha} - 1$. Comme $\dfrac{1}{3} < \alpha < \dfrac{1}{2}$, alors par stricte décroissance de la fonction inverse

$$2 < \frac{1}{\alpha} < 3 \quad \Leftrightarrow \quad 1 < E < 2.$$

(e) L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge-t-elle ?

f est nulle sur $]-\infty,\alpha[$, ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus,

$$t^2 f(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t}.$$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,dt$ *diverge, d'après le critère de comparaison par équivalence* $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ *diverge.*