Généralités sur les fonctions réelles

Table des matières

1 Généralités sur les fonctions réelles

1.1 Définitions

Définition 1.1 : *Fonction réelle*

On appelle **fonction** de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, toute application f définie sur un sous-ensemble D_f de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note

$$\begin{array}{rcl} f \,:\, D_f & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

D_f est appelé **l'ensemble de définition** de f. C'est l'ensemble des réels x pour lesquels l'expression $f(x)$ est définie.

Il ne faut pas confondre les notations f et $f(x)$.
f représente une fonction (que l'on peut aussi noter $x \mapsto f(x)$).
$f(x)$ représente l'image de x par f dans $\mathbb{R}$ donc $f(x)$ est un nombre réel.

Exemple 1. *La fonction* $f : x \mapsto \sqrt{x}$ *est définie sur* $D_f = \mathbb{R}_+$.
La fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ *est définie sur* $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

Définition 1.2 : *Courbe représentative de f*

On appelle **courbe représentative de** f (ou **graphe** de f) l'ensemble

$$C_f = \{(x, f(x)) \text{ avec } x \in D_f\}\,.$$

Pour représenter la fonction f, on trace dans un repère orthogonal la courbe du plan formée de tous les points du graphe.

1.2 Propriétés des fonctions

1.2.1 Parité, imparité

Définition 1.3 : *Fonction paire, impaire*

Soit f une fonction telle que D_f soit centré en 0 ($\forall x \in D_f, -x \in D_f$).

- La fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ est **paire** si :

$$\forall x \in D_f, f(-x) = f(x).$$

- La fonction $f : D_f \to \mathbb{R}$ est **impaire** si :

$$\forall x \in D_f, f(-x) = -f(x).$$

Exemple 2. *Reconnaître, parmi les fonctions suivantes, les fonctions paires et les fonctions impaires :*

$$(i) \quad x \mapsto x^2, \quad (ii) \quad x \mapsto x^3, \quad (iii) \quad x \mapsto |x|, \quad (iv) \quad x \mapsto \frac{1}{x},$$
$$(v) \quad x \mapsto \cos(x), \quad (vi) \quad x \mapsto \sin(x), \quad (vii) \quad x \mapsto \tan(x).$$

Solution.

Propriété 1.4 : *Symétries de la courbe représentative*

Si f est paire, alors C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Si f est impaire, alors C_f est symétrique par rapport à l'origine du repère.

1.2.2 Périodicité

Définition 1.5 : *Fonction périodique*

La fonction f est dite périodique si $\exists T > 0$ tel que

$$\forall x \in D_f, \quad x + T \in D_f \text{ et } f(x) = f(x+T).$$

On dit alors que la fonction f est T**-périodique** (ou de **période** T).

La première condition sert à vérifier que $f(x+T)$ a un sens. Elle est toujours vraie si $D_f = \mathbb{R}$.

Exemple 3. *Les fonctions cosinus et sinus sont* 2π*-périodiques. La fonction tangente est* π*-périodique.*

1.2.3 Fonctions majorées, minorées, bornées

Définition 1.6 : *Fonctions majorées, minorées, bornées*

Une fonction f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ est dite :

- **majorée** sur A lorsqu'il existe un réel M tel que

$$\forall x \in A, \quad f(x) \leq M,$$

  le réel M est alors un majorant de f sur A. Un majorant n'est pas unique.
- **minorée** sur A lorsqu'il existe un réel m tel que

$$\forall x \in A, \quad f(x) \geq m,$$

  m est alors un minorant de f sur A. Un minorant n'est pas unique.
- **bornée** sur A si elle est majorée et minorée sur A.

Un majorant qui est atteint est un **maximum**, un minorant atteint, un **minimum**, et un **extremum** est un maximum ou un minimum.

Autrement dit, une fonction est majorée si l'ensemble $f(A)$ est majoré et minorée si $f(A)$ est minoré.

Proposition 1.7 : *Fonction bornée*

Soit f une fonction définie sur une partie A de $\mathbb{R}$.

$$f \text{ est bornée} \quad \Leftrightarrow \quad |f| \text{ est majorée.}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
f \text{ est bornée} \quad & \Leftrightarrow \quad \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall x \in A, \quad m \leq f(x) \leq M \\
& \Leftrightarrow \quad \exists K \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in A, \quad -K \leq f(x) \leq K \text{ avec } K = \max(|m|, |M|) \\
& \Leftrightarrow \quad \exists K \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in A, \quad |f(x)| \leq K \\
& \Leftrightarrow \quad |f| \text{ est majorée.}
\end{aligned}$$

$\square$

Exemple 4. *Préciser si les fonctions suivantes sont majorées, minorées et si elles possèdent un maximum ou un minimum.*

$$(i) \quad \begin{array}{rrcl} f : & [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin(x) \end{array} \qquad (ii) \quad \begin{array}{rrcl} g : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array} \qquad (iii) \quad \begin{array}{rrcl} h : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2 - x^4 \end{array}$$

Solution.

1.2.4 Sens de variation

Définition 1.8 : *Variations des fonctions*

Une fonction f définie sur une partie A de $\mathbb{R}$ est dite :

— **constante** sur A lorsqu'il existe un réel c tel que

$$\forall x \in A, \quad f(x) = c,$$

— **croissante** sur A si

$$\forall (x, x') \in A^2, \quad x \leq x' \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(x'),$$

— **strictement croissante** sur A si

$$\forall (x, x') \in A^2, \quad x < x' \quad \Rightarrow \quad f(x) < f(x'),$$

— **décroissante** sur A si

$$\forall (x, x') \in A^2, \quad x \leq x' \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(x'),$$

— **strictement décroissante** sur A si

$$\forall (x, x') \in A^2, \quad x < x' \quad \Rightarrow \quad f(x) > f(x'),$$

— **(strictement) monotone** sur A si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante.

Propriété 1.9 : *Composée de fonctions monotones*

Si f est monotone sur A et g est monotone sur $f(A)$, alors $g \circ f$ est monotone sur A. Pour être précis,

(i) si f et g ont même sens de variation, $g \circ f$ est croissante,

(ii) si f et g ont des sens de variation opposés, $g \circ f$ est décroissante.

Démonstration. (i) On distingue deux cas :

- si f et g sont croissantes, alors pour $(x, x') \in A^2$ tels que $x \leq x'$,

$$f(x) \leq f(x').$$

Comme g est croissante sur $f(A)$, alors

$$g\left(f(x)\right) \leq g\left(f(x')\right).$$

Ainsi $g \circ f$ est croissante sur A.

- si f et g sont décroissantes, alors pour $(x, x') \in A^2$ tels que $x \leq x'$,

$$f(x) \geq f(x').$$

Comme g est décroissante sur $f(A)$, alors

$$g\left(f(x)\right) \leq g\left(f(x')\right).$$

Ainsi $g \circ f$ est croissante sur A

(ii) À démontrer en exercice.

□

Exemple 5. *Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$.*
La fonction $x \mapsto x^2+2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $[2, +\infty[$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $[2, +\infty[$ donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$

Exemple 6. *On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$.*

1. *Montrer que f est définie et paire sur $\mathbb{R}$.*
2. *Montrer que f est bornée par 0 et 1, mais que seul 1 est un extremum.*
3. *Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.*

Solution.

2 Les fonctions algébriques usuelles

2.1 La fonction valeur absolue

Définition 2.1 : *Fonction valeur absolue*

La fonction $x \mapsto |x|$ est appelée **fonction valeur absolue** et elle est définie par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Propriété 2.2 : *Fonction valeur absolue*

La fonction $f : x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

De plus, f est paire et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\lim_{x \to +\infty} |x| = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} |x| = +\infty.$$

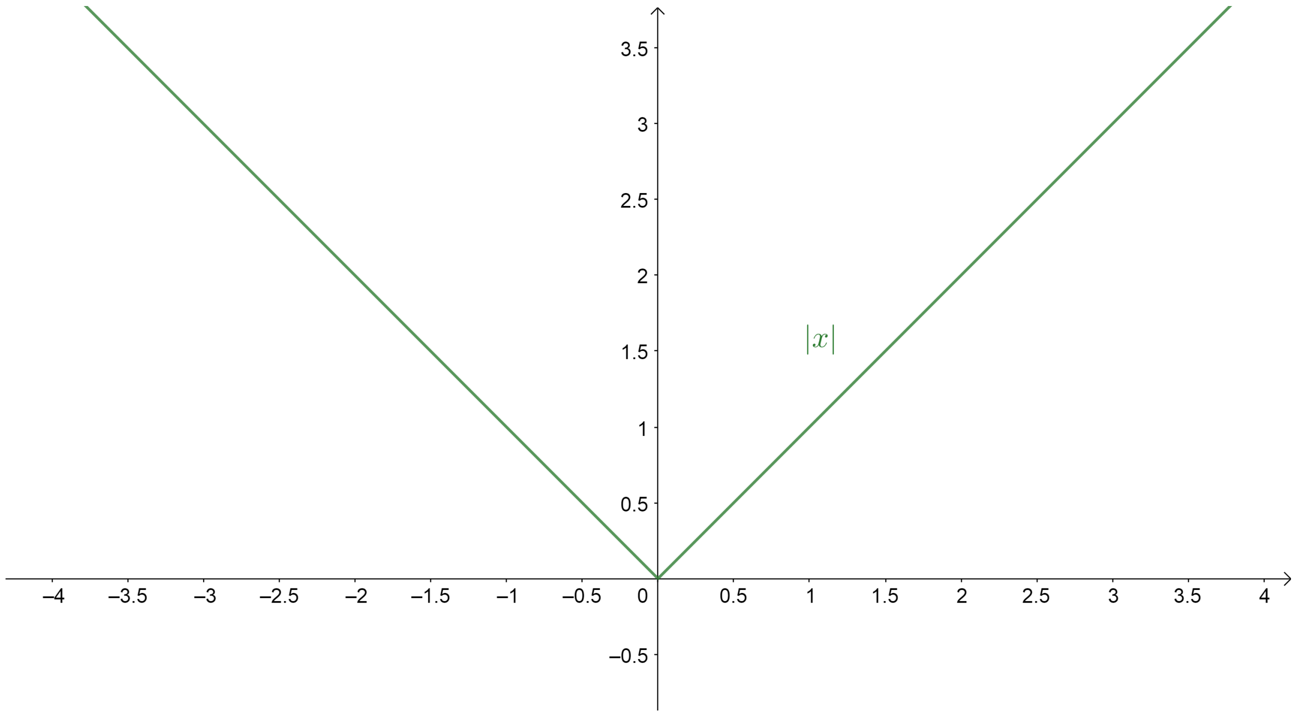
Exemple 7. *Si $x \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$, alors*

$$|x| \leq a \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a.$$

$$|x| \geq a \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -a \text{ ou } x \geq a.$$

Propriété 2.3 : *Règles de calcul*

- Positivé de la valeur absolue : pour $x \in \mathbb{R}$, $|x| \geq 0$.
- Parité de la valeur absolue : pour $x \in \mathbb{R}$, $|-x| = |x|$.
- Multiplication : pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| = |x|\,|y|$.
- Division : pour $(x, y) \in \mathbb{R}^{*2}$, $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.
- Inégalité triangulaire : pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x + y| \leq |x| + |y|$.



2.2 Les fonctions puissances entières

Définition 2.4 : *Fonction puissance entière*

Soit $n \in \mathbb{Z}$. La fonction $x \mapsto x^n$ est appelée **fonction puissance** $n^{\text{ième}}$.

2.2.1 Cas où n est positif

Propriété 2.5 : *Fonction puissance entière positive*

Si $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto x^n$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = n\,x^{n-1}.$$

De plus,

— si n est pair, alors f est paire et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$,

— si n est impair, alors f est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

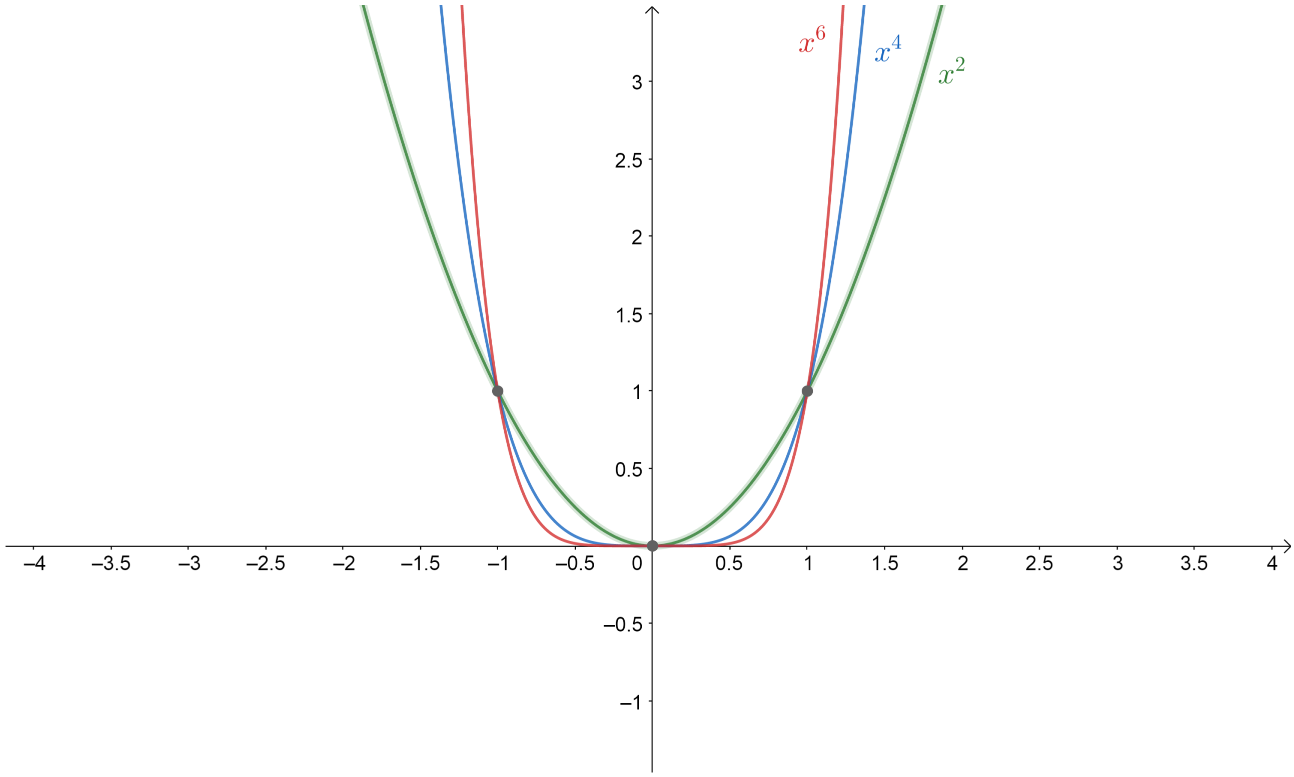
Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

Exemple 8. *Si $x \in \mathbb{R}$ et $a \geq 0$, alors*

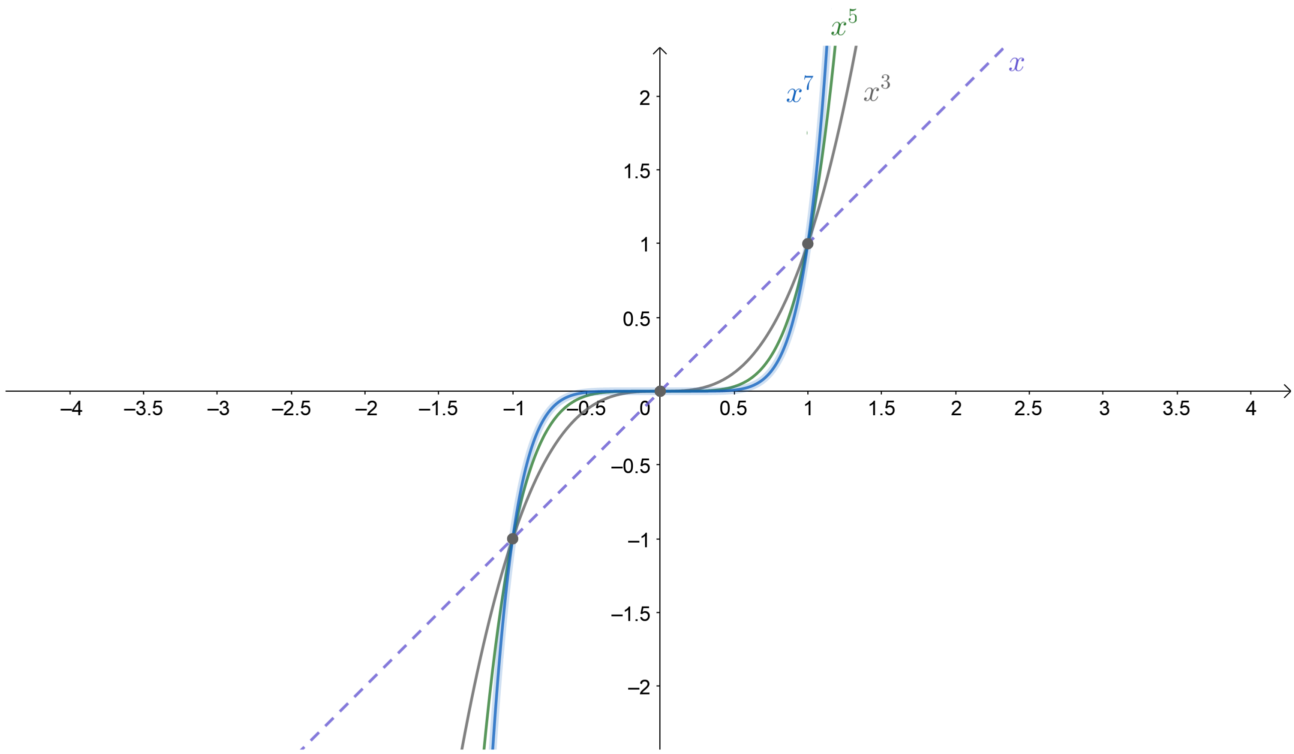
$$x^2 \leq a^2 \quad \Leftrightarrow \quad -a \leq x \leq a.$$

$$x^2 \geq a^2 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -a \text{ ou } x \geq a.$$

Cas pair



Cas impair



2.2.2 Cas où n est négatif

Propriété 2.6 : *Fonction puissance entière négative*

Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, la fonction $f : x \mapsto x^n$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = n\, x^{n-1}.$$

De plus,

— si n est pair, alors f est paire et strictement croissante sur $\mathbb{R}^*_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$,

— si n est impair, alors f est impaire et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$.

Si $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^-} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$

On peut aussi définir la fonction f par : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f : x \mapsto x^{-n} = \frac{1}{x^n}.$$

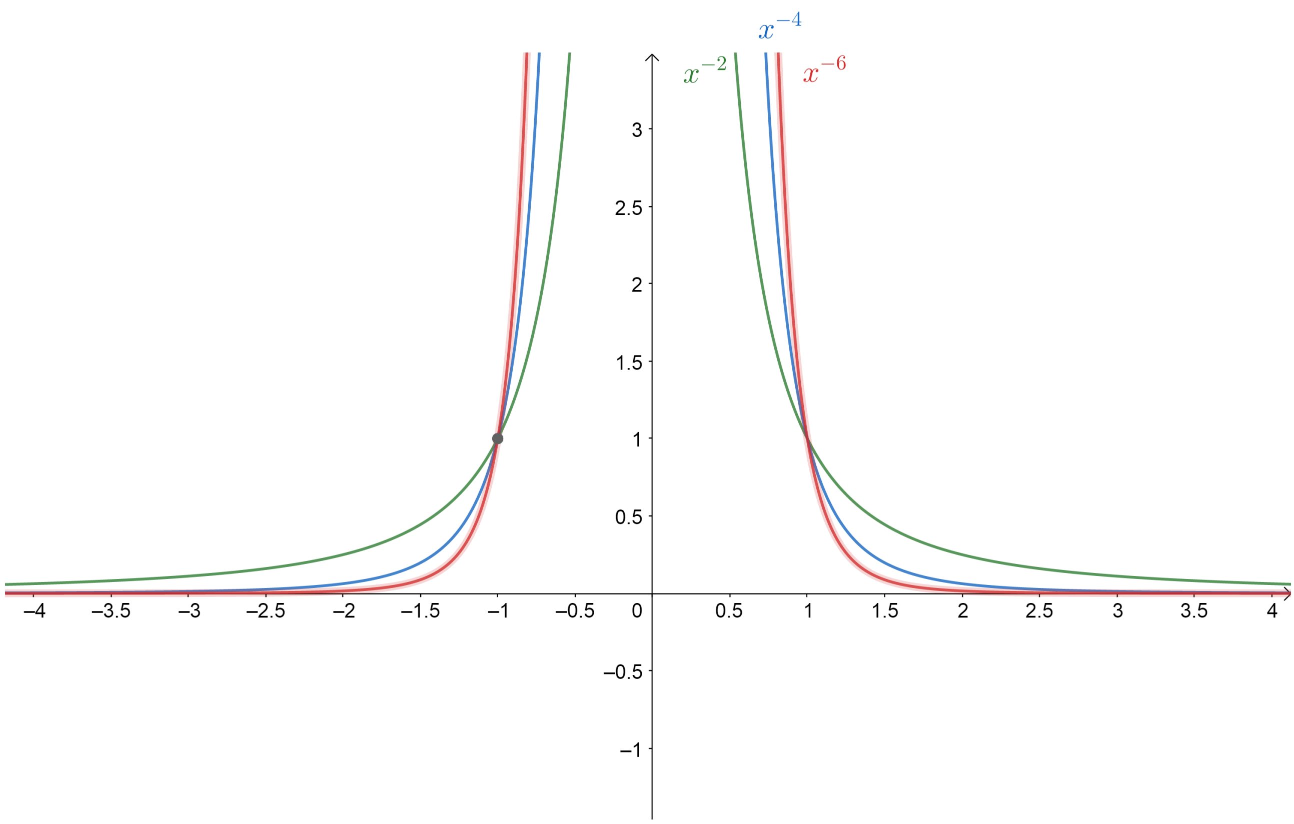
Exemple 9. *La fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_-$ et strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$.*

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

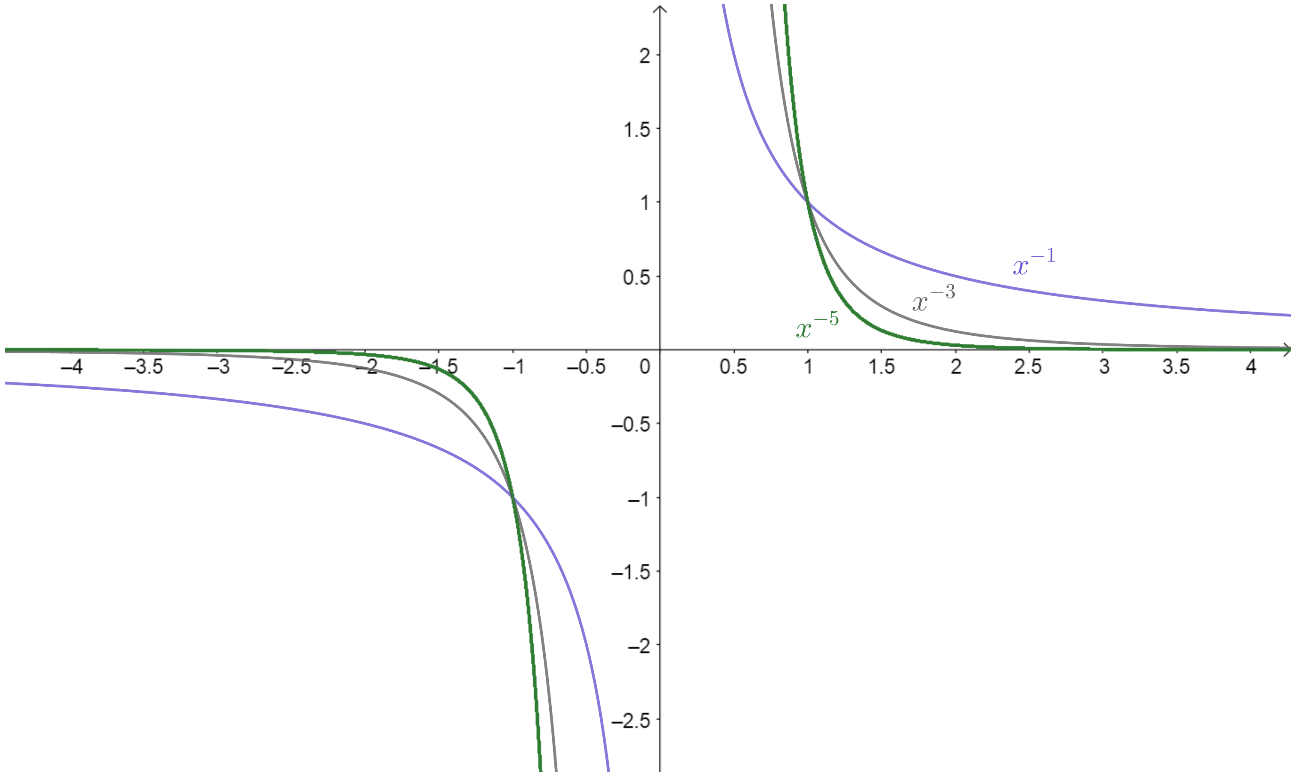
Il ne faut pas dire que $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$. Ceci est faux car par exemple, -1 et 1 sont des éléments de $\mathbb{R}^*$ et pourtant

$$f(-1) \leq f(1).$$

Cas pair



Cas impair



2.3 Les fonctions polynomiales et rationnelles

Définition 2.7 : *Fonction polynomiale*

Soient $p \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_p$ des réels avec $a_p \neq 0$. La fonction f suivante est appelée **fonction polynomiale** et elle est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k = a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p.$$

Propriété 2.8 : *Fonction polynomiale*

La fonction polynomiale $f : x \mapsto \sum_{k=0}^{p} a_k x^k$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \sum_{k=1}^{p} k a_k x^{k-1}.$$

Elle possède les mêmes limites en $\pm\infty$ que la fonction $x \mapsto a_p x^p$.

Exemple 10. *Suivant le degré p de la fonction polynomiale, on a les situations suivantes :*

- *Si $p = 0$, f est une fonction constante sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $p = 1$, f est une fonction affine sur $\mathbb{R}$.*
- *Si $p = 2$, f est un trinôme du second degré. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$, $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.*
  - *Si $a > 0$, f est strictement décroissante sur $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ et strictement croissante sur $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$.*
  - *Si $a < 0$, f est strictement croissante sur $\left]-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right[$.*

Définition 2.9 : *Fonction rationnelle*

On appelle **fonction rationnelle** tout quotient de deux fonctions polynomiales. Soient f_1 et f_2 deux fonctions polynomiales définies avec $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$ par

$$f_1 : x \mapsto \sum_{k=0}^{p} a_k x^k \qquad \text{et} \qquad f_2 : x \mapsto \sum_{k=0}^{q} b_k x^k.$$

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des racines de f_2. La fonction rationnelle f est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{A},\ f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_q x^q}.$$

Propriété 2.10 : *Fonction rationnelle*

La fonction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathcal{A}$ et elle possède les mêmes limites en $\pm\infty$ que la fonction $x \mapsto \dfrac{a_p x^p}{b_q x^q}$.

2.4 Les fonctions racines

Définition 2.11 : *Fonction racine*

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. La fonction $x \mapsto x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$ est appelée **fonction racine** $n^{\text{ième}}$ et c'est la bijection réciproque de la restriction de la fonction $x \mapsto x^n$ à $\mathbb{R}_+$.

Proposition 2.12 : *Fonction racine*

Si $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, la fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{x^{-1+1/n}}{n} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}.$$

De plus, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty.$$

Exemple 11. *La fonction racine carrée $f : x \mapsto x^{1/2} = \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et*

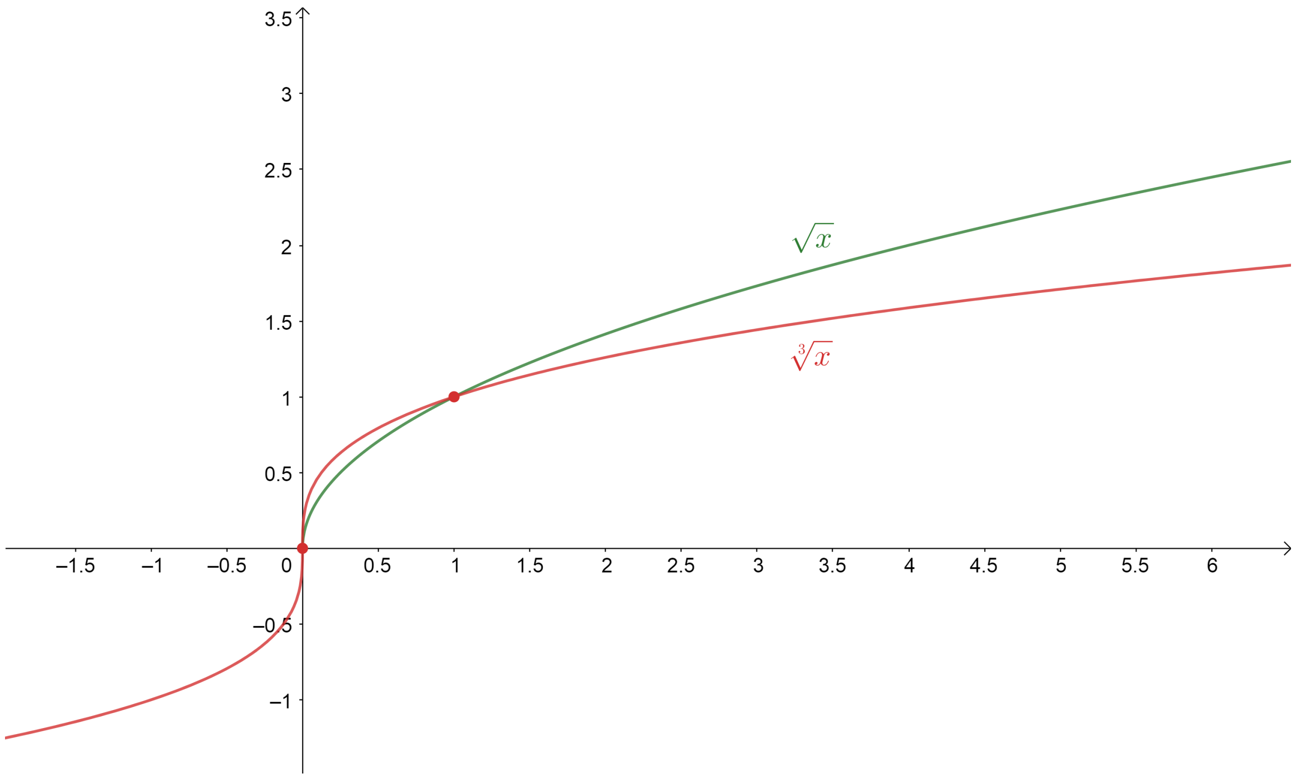
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Il peut être utile de connaître quelques valeurs remarquables de la racine carrée :

$$\sqrt{0} = 0, \quad \sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{2} \approx 1.41 \ \textit{et} \ \sqrt{3} \approx 1.73.$$

Propriété 2.13 : *Racine carrée d'un carré*

Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{x^2} = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$



2.5 La fonction partie entière

Définition 2.14 : *Fonction partie entière*

La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est appelée **fonction partie entière**. Pour $x \in \mathbb{R}$, elle associe le seul entier $\lfloor x \rfloor$ qui vérifie

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x.$$

Proposition 2.15 : *Fonction partie entière*

La fonction $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. De plus, f est croissante sur $\mathbb{R}$ et constante sur chaque intervalle $[k, k+1[$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

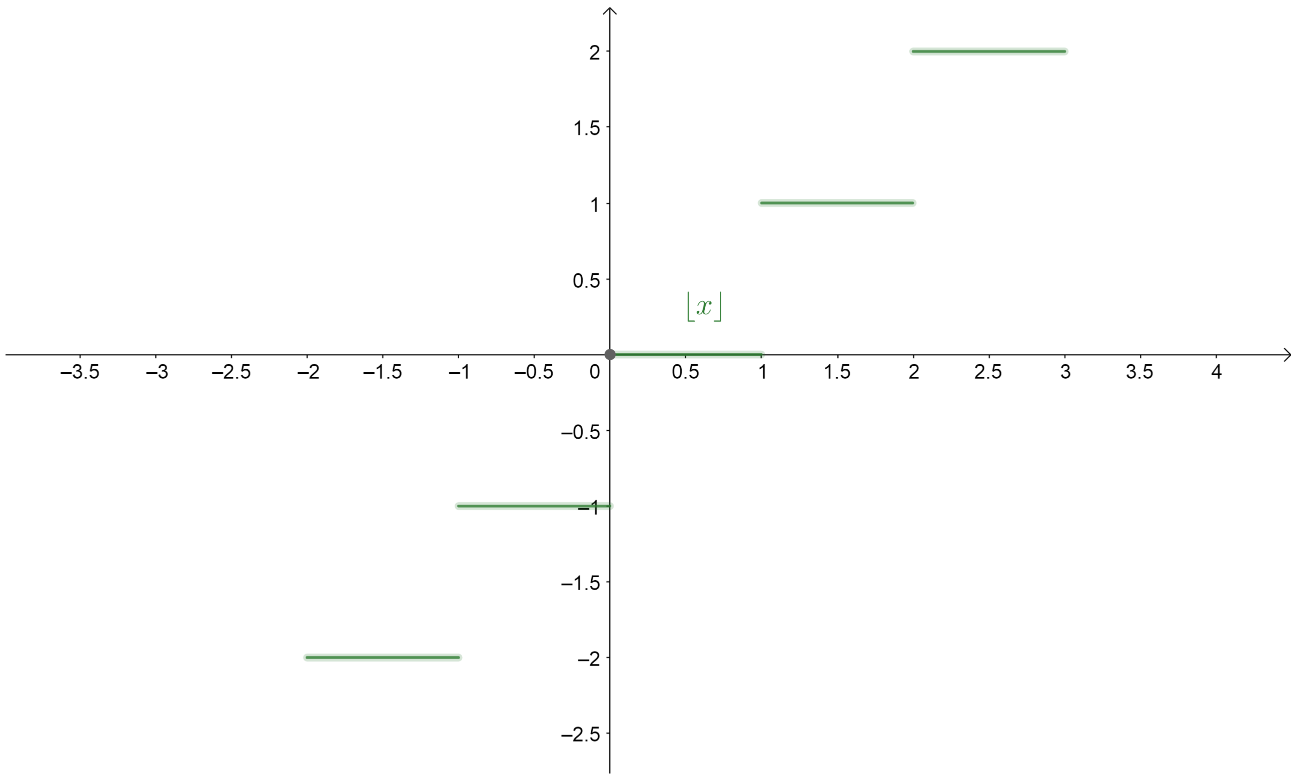
$$\lim_{x \to -\infty} \lfloor x \rfloor = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \lfloor x \rfloor = +\infty.$$

Remarque 2.16 : *Fonction partie entière*

On remarque que pour $x \in \mathbb{R}$,

$$x - \lfloor x \rfloor \in [0, 1[.$$

De plus, la fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.



3 Les fonctions exponentielle et logarithme népérien

3.1 La fonction logarithme népérien

Définition 3.1 : *Fonction logarithme népérien*

La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ (ou parfois $\log(x)$) est appelée **logarithme népérien** et définie par

$$\ln(1) = 0 \quad \text{et } \forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Le logarithme népérien est donc l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$, qui s'annule en 1 de la fonction inverse.

Propriété 3.2 : *Fonction logarithme népérien*

La fonction $f : x \mapsto \ln(x)$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \frac{1}{x}.$$

De plus, f strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty.$$

Remarque 3.3 : *Signe du logarithme népérien*

Attention la fonction logarithme népérien n'est pas toujours positive ! Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$,

si $x \leq 1$, alors $\ln(x) \leq 0$. Si $x \geq 1$, alors $\ln(x) \geq 0$.

Si $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, alors

$$\begin{aligned} \ln(x) = \ln(y) &\quad\Leftrightarrow\quad x = y. \\ \ln(x) \leq \ln(y) &\quad\Leftrightarrow\quad x \leq y. \\ \ln(x) < \ln(y) &\quad\Leftrightarrow\quad x < y. \end{aligned}$$

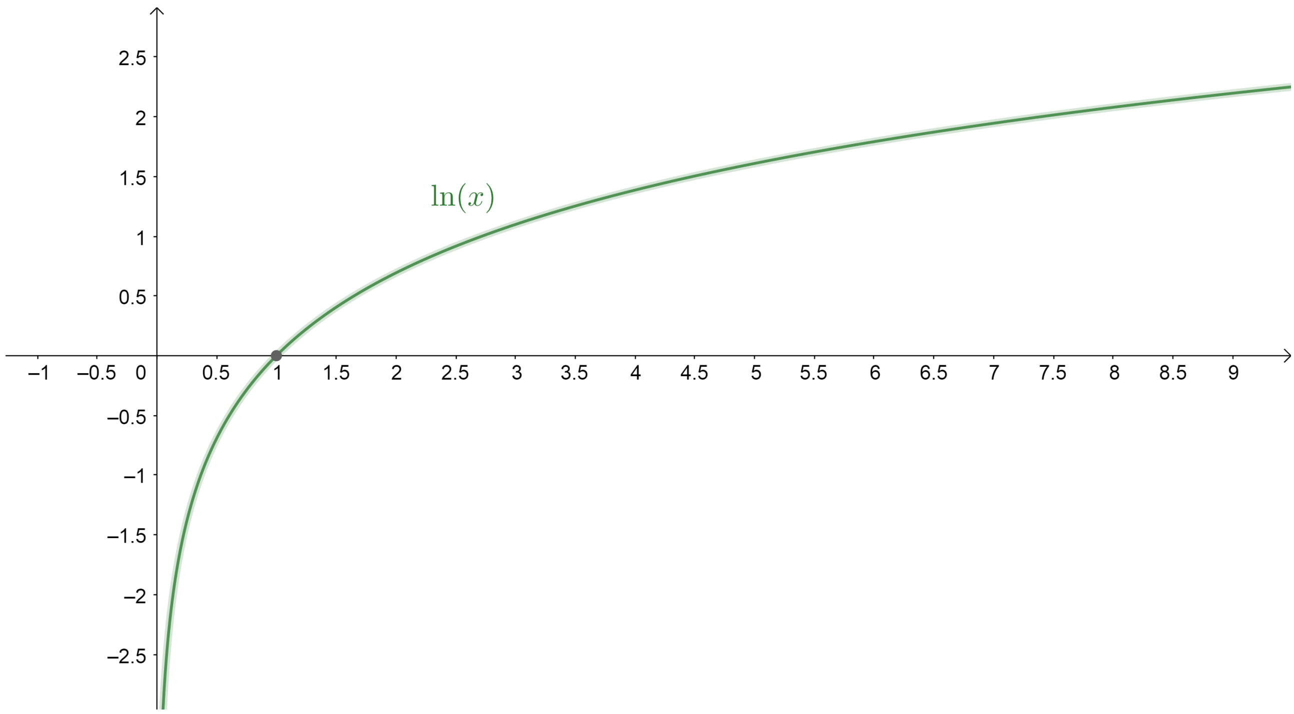
Exemple 12. *Il peut être utile de connaître les valeurs suivantes :*

$$\ln(1) = 0 \quad \textit{et} \quad \ln(2) \approx 0.69$$

Propriété 3.4 : *Règles de calcul*

Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}_+^{*2}$.

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad \ln(x^n) = n\ln(x) \quad \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y).$$



3.2 La fonction exponentielle

Définition 3.5 : *Fonction exponentielle*

La fonction $f : x \mapsto e^x$ (ou $\exp(x)$) est appelée **exponentielle** et c'est la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien. De ce fait,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+^*, e^x = y \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(y).$$

Ainsi on peut écrire

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln(y)} = y.$$

Propriété 3.6 : *Fonction exponentielle*

La fonction $f : x \mapsto e^x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = e^x.$$

De plus, f strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{aligned} e^x = e^y &\quad\Leftrightarrow\quad x = y.\\ e^x \leq e^y &\quad\Leftrightarrow\quad x \leq y.\\ e^x < e^y &\quad\Leftrightarrow\quad x < y.\end{aligned}$$

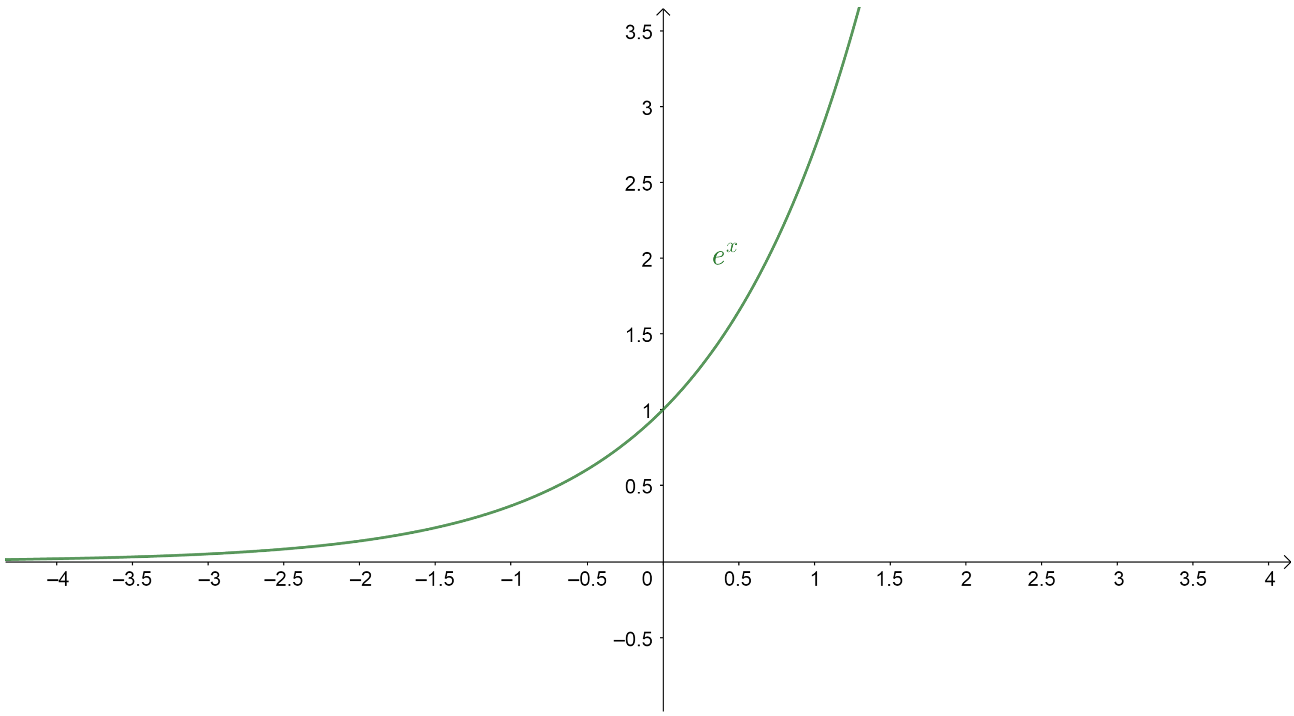
Exemple 13. *Il peut être utile de connaître les valeurs suivantes :*

$$e^0 = 1 \quad \textit{et} \quad e^1 = e \approx 2.72$$

Propriété 3.7 : *Règles de calcul*

Soient $n \in \mathbb{Z}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$e^{x+y} = e^x e^y \quad (e^x)^n = e^{nx} \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}.$$



3.3 Puissances à exposant réel

Définition 3.8 : *Puissance à exposant réel*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ est appelée **fonction puissance** α et elle est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x).$$

Propriété 3.9 : *Puissance à exposant réel*

Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $f : x \mapsto x^\alpha$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = \alpha\, x^{\alpha - 1}.$$

De plus,

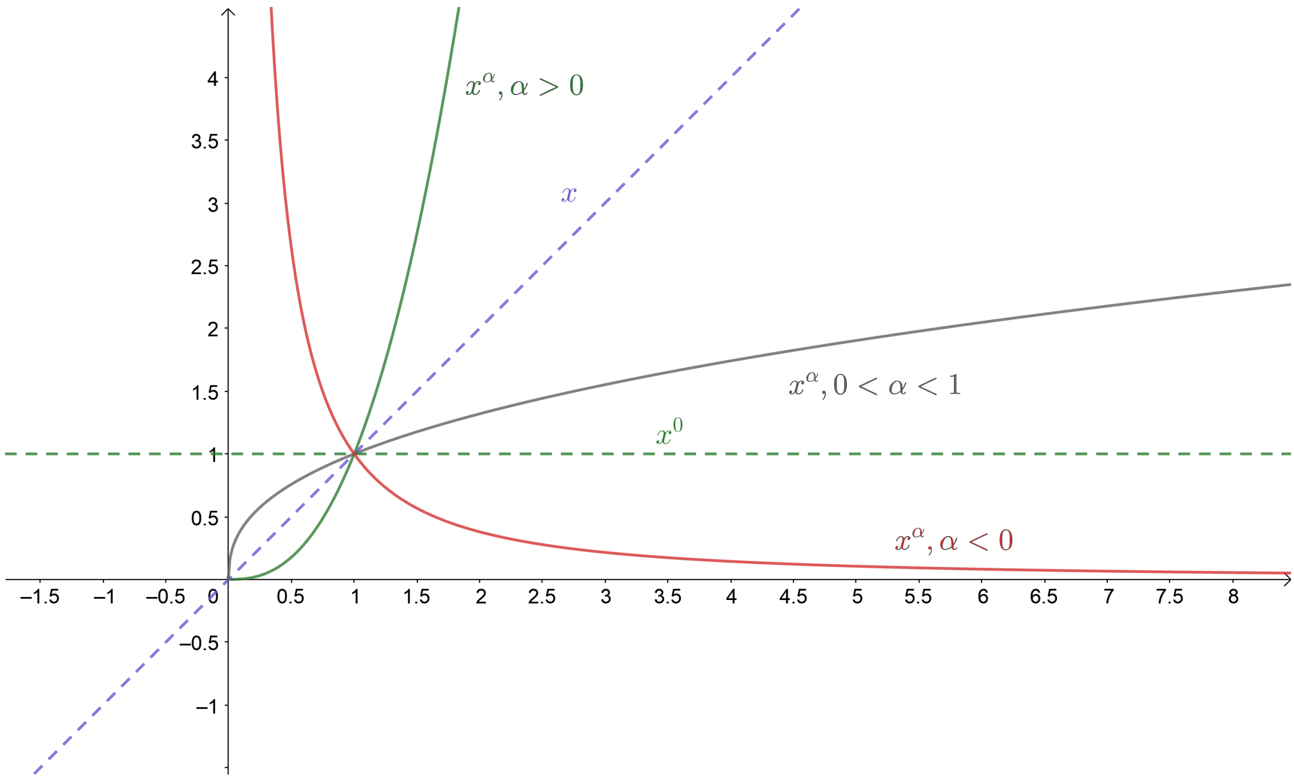
- si $\alpha > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$,
- si $\alpha < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Si $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^\alpha = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha > 0, \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x^\alpha = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0, \\ 0 & \text{si } \alpha < 0. \end{cases}$

Propriété 3.10 : *Règles de calcul*

Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.

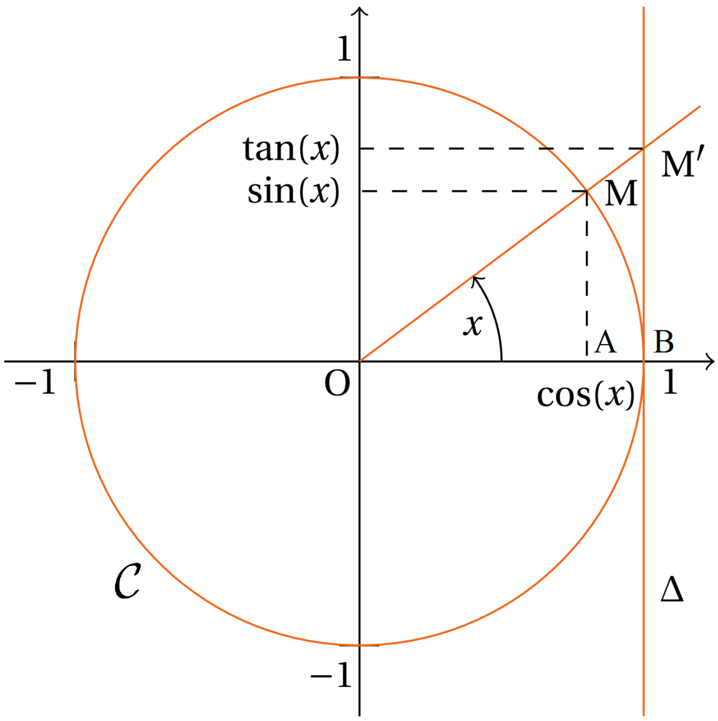
$$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta \quad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta} \quad (xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}.$$



4 Les fonctions trigonométriques

On considère la représentation suivante du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 dans le plan (muni d'un repère orthonormé direct). Chaque point M du cercle $\mathcal{C}$ peut être associé à un angle x dont la valeur en radian (dans $[0, 2\pi[$) correspond à la longueur de l'arc BM (B étant le point $(1, 0)$).

Le cosinus de l'angle x (noté $\cos(x)$) est l'abscisse du point M, le sinus de l'angle x (noté $\sin(x)$) est l'ordonnée du point M. La tangente de l'angle x (notée $\tan(x)$) est l'ordonnée du point M', intersection de la droite (OM) avec la droite Δ tangente en B au cercle $\mathcal{C}$. Comme il n'y a pas d'intersection entre (OM) et Δ pour les angles $x = \frac{\pi}{2}$ et $x = -\frac{\pi}{2}$, la tangente de ces angles n'est pas définie.



Les fonctions cosinus et sinus sont ensuite prolongées sur $\mathbb{R}$ par 2π-périodicité. La fonction tangente est prolongée sur $\mathbb{R}$ par π-périodicité.

Théorème 4.1 : *Pythagore*

Pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Démonstration. On note A le point $(\cos(x), 0)$. On applique le théorème de Pythagore au triangle rectangle OAM. □

Corollaire 4.2 : *Bornes*

Pour $x \in \mathbb{R}$,
$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1.$$

Démonstration. D'après le théorème 4.1, comme $\cos^2(x) \geq 0$, alors
$$\sin^2(x) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1.$$
De même,
$$\cos^2(x) \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -1 \leq \cos(x) \leq 1.$$
□

Théorème 4.3 : *Thalès*

Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$,

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Démonstration. On note A le point $(\cos(x), 0)$ et B le point $(1, 0)$. Les points O, M, M' et O, A, B sont alignés, les droites (AM) et (BM') sont parallèles. D'après le théorème de Thalès,

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\tan(x)}{1} = \tan(x).$$

□

4.1 La fonction sinus

Définition 4.4 : *Fonction sinus*

La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est appelée **fonction sinus**.

Propriété 4.5 : *Fonction sinus*

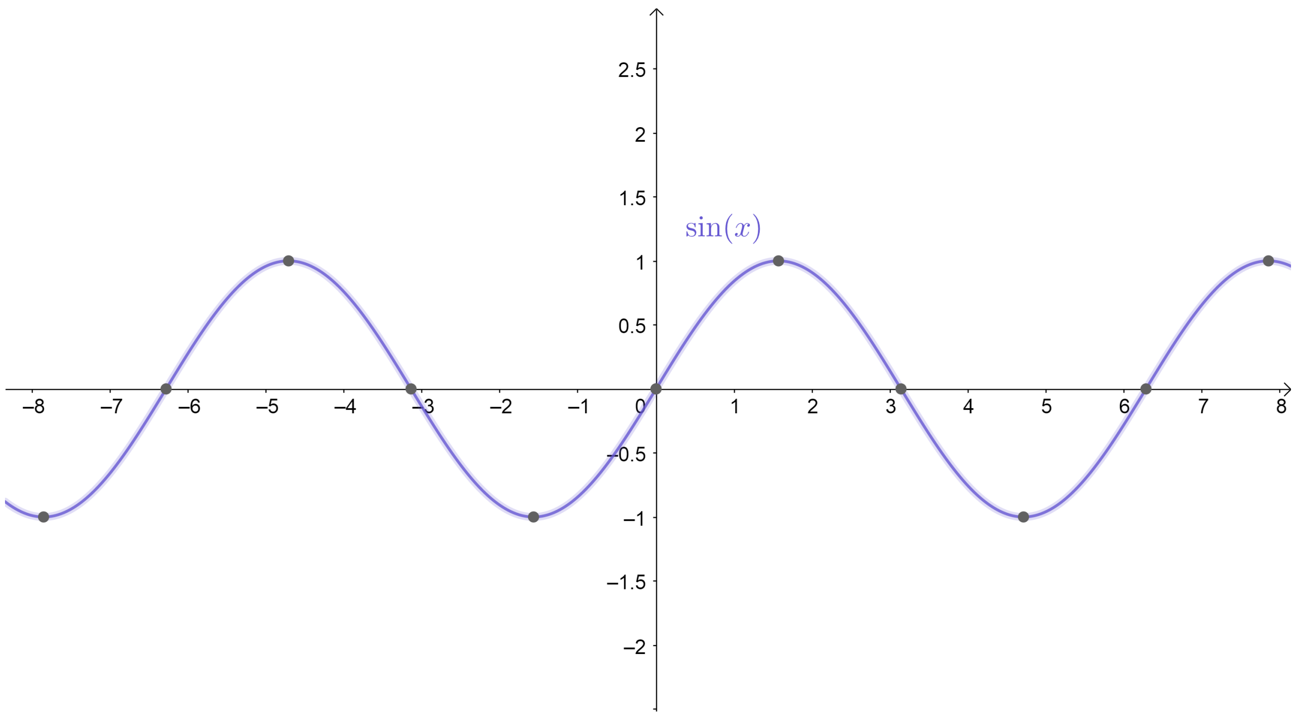
La fonction $f : x \mapsto \sin(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \cos(x).$$

De plus, f est impaire, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et n'admet pas de limite finie ou infinie en $\pm\infty$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \sin(x) \leq 1.$$

La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. D'après le théorème de la bijection monotone, elle réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$.



4.2 La fonction cosinus

Définition 4.6 : *Fonction cosinus*

La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est appelée **fonction cosinus**.

Propriété 4.7 : *Fonction cosinus*

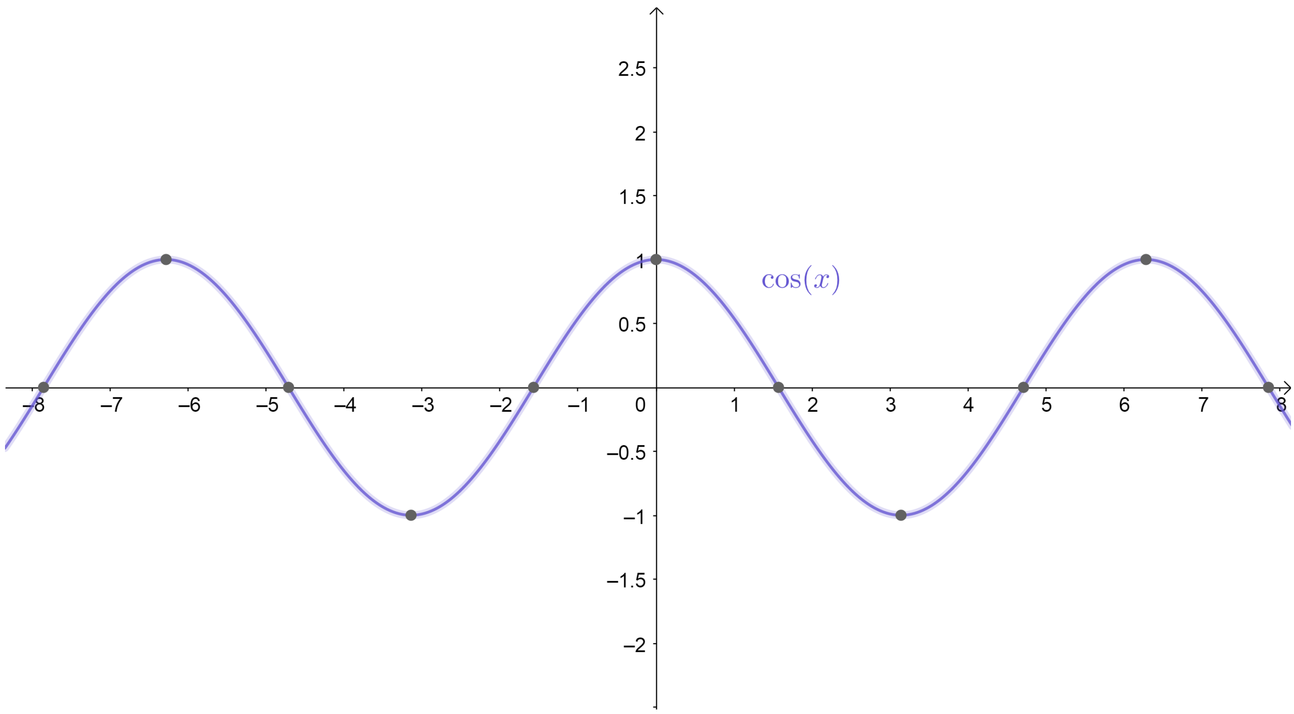
La fonction $f : x \mapsto \cos(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -\sin(x).$$

De plus, f est paire, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et n'admet pas de limite finie ou infinie en $\pm\infty$.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ -1 \leq \cos(x) \leq 1.$$

La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$. D'après le théorème de la bijection monotone, elle réalise une bijection de $[0, \pi]$ dans $[-1, 1]$.



Exemple 14. *Résolvons l'équation* $4\cos^2(2x) = 3$*. Pour* $x \in \mathbb{R}$*,*

$$\begin{aligned}
4\cos^2(2x) = 3 \quad &\Leftrightarrow \quad \cos^2(2x) = \frac{3}{4} \\
&\Leftrightarrow \quad \cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \ \ \textit{ou} \ \ \cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad 2x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \ \textit{ou} \ \ 2x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \qquad \textit{avec } k \in \mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad x = \pm\frac{\pi}{12} + k\pi \ \ \textit{ou} \ \ x = \pm\frac{5\pi}{12} + k\pi \qquad \textit{avec } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Certaines solutions se retrouvent deux fois et on obtient l'ensemble des solutions suivant :

$$\left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\dots, -\frac{11\pi}{12}, -\frac{7\pi}{12}, -\frac{5\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \dots\right\}.$$

4.3 La fonction tangente

Définition 4.8 : *Fonction tangente*

La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est appelée **fonction tangente** et elle est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

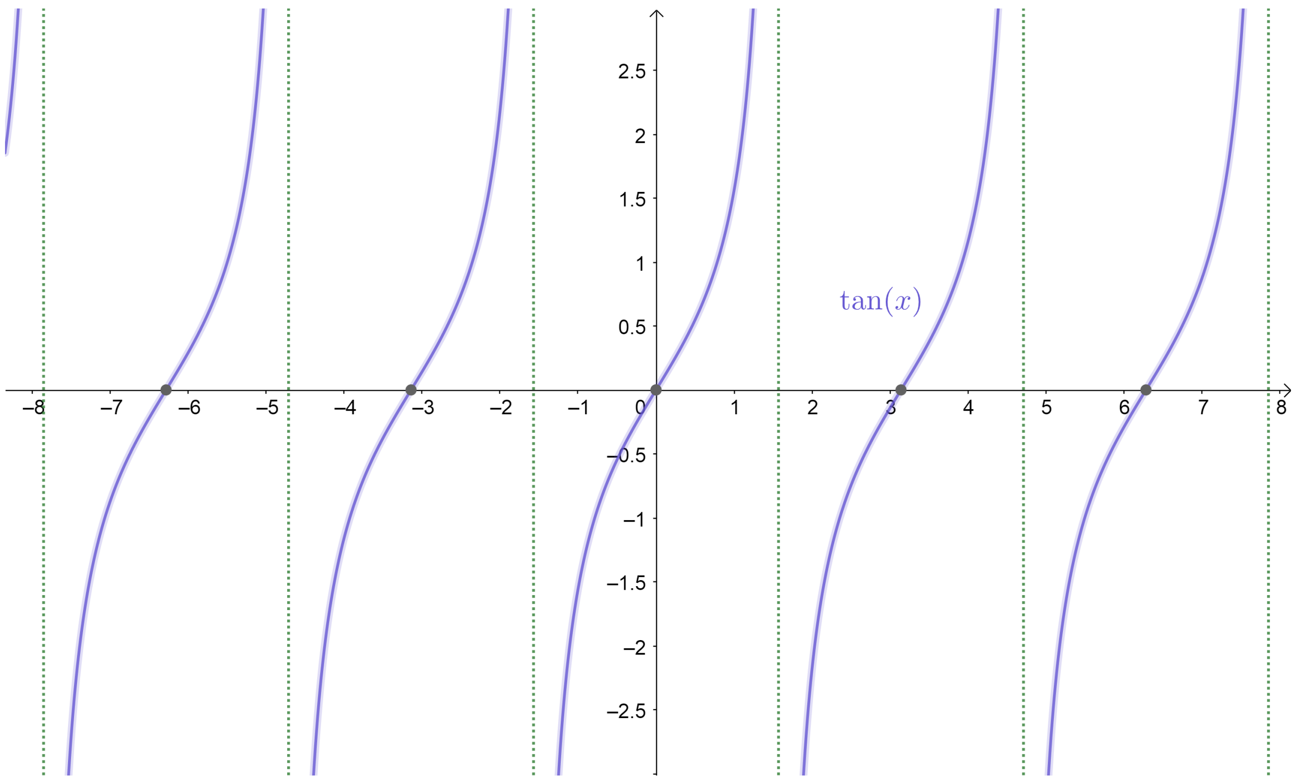
Propriété 4.9 : *Fonction tangente*

La fonction $f : x \mapsto \tan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\},\ f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

De plus, f est impaire, π-périodique sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ et n'admet pas de limite finie ou infinie en $\pm\infty$.

La fonction tangente est continue et strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. D'après le théorème de la bijection monotone, elle réalise une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$.



4.4 La fonction arctangente

Définition 4.10 : *Fonction arctangente*

La fonction $x \mapsto \arctan(x)$ est appelée **fonction arctangente** et c'est la bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan(x) < \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \tan(\arctan(x)) = x.$$

Propriété 4.11 : *Fonction arctangente*

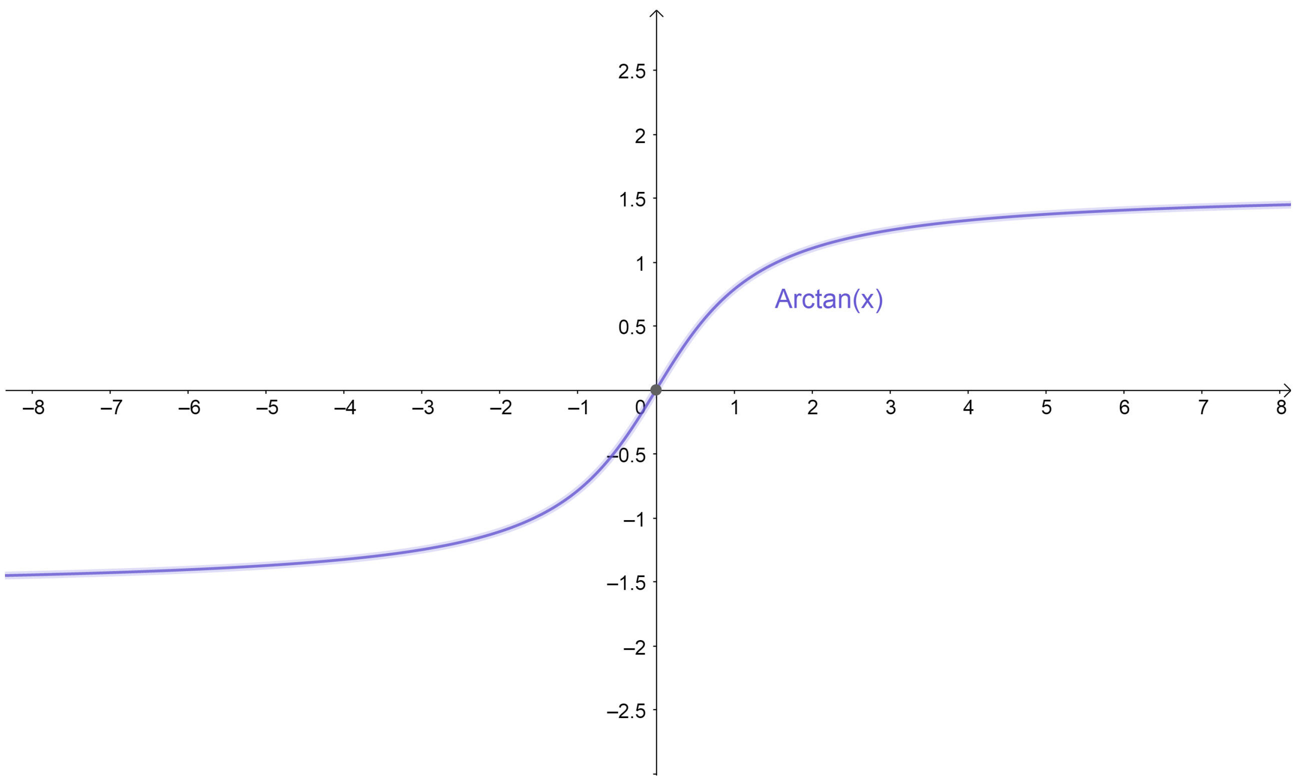
La fonction $f : x \mapsto \arctan(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

De plus, f est impaire et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

La dérivée de la fonction arctan sera calculée dans le chapitre Dérivabilité.



4.5 Formulaire de trigonométrie

Soient x et y deux réels.

$$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1 \qquad \text{(théorème de Pythagore)}$$
$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \qquad \text{(théorème de Thalès)}$$

$$\cos(-x)=\cos(x) \qquad \text{(cosinus est paire)}$$
$$\sin(-x)=-\sin(x) \qquad \text{(sinus est impaire)}$$

Formules d'addition

$$\begin{aligned}\cos(x+y)&=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)\\ \cos(x-y)&=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(x+y)&=\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x)\\ \sin(x-y)&=\sin(x)\cos(y)-\sin(y)\cos(x)\end{aligned}$$

Les formules ci-dessous ne sont pas exigibles par le programme. Elles sont des conséquences des formules d'addition.

Formules de duplication

$$\cos(2x)=\cos^2(x)-\sin^2(x) \qquad \sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$$

Transformation de produits en sommes

$$\cos(x)\ \cos(y)=\frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$$

$$\sin(x)\ \sin(y)=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\sin(x)\ \cos(y)=\frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$$

Formules de linéarisation

$$\cos^2(x)=\frac{1+\cos(2x)}{2} \qquad \sin^2(x)=\frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Formules de factorisation

$$\begin{aligned}\cos(x)+\cos(y)&=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\\ \cos(x)-\cos(y)&=-2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin(x)+\sin(y)&=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\\ \sin(x)-\sin(y)&=2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\end{aligned}$$

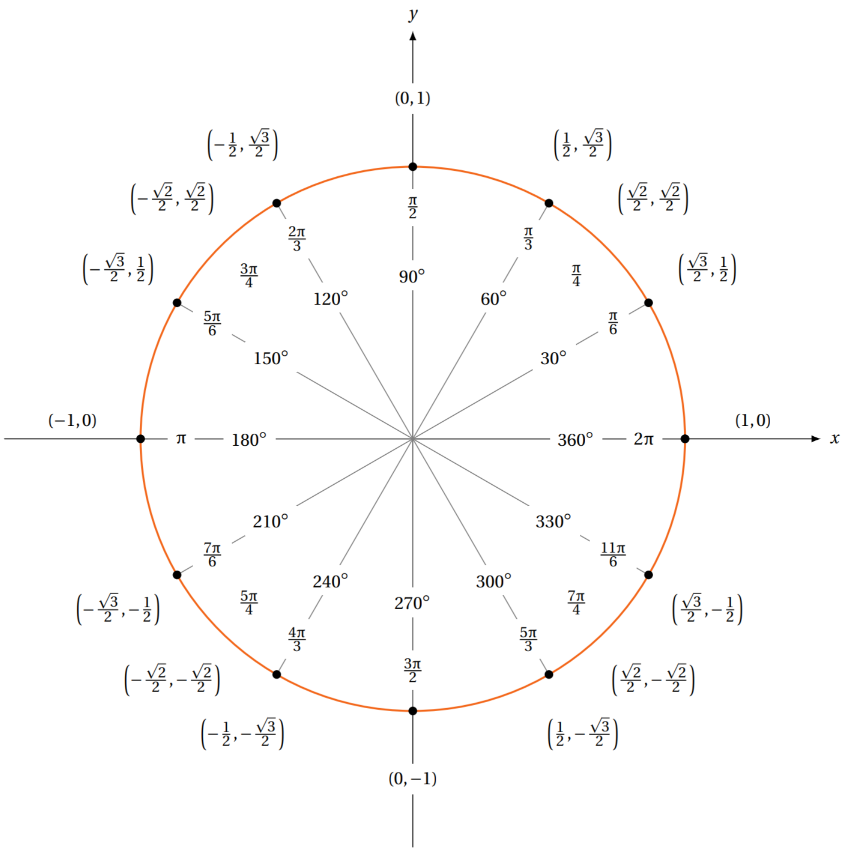
Exemple 15. *Il peut être utile de connaître plus particulièrement les formules suivantes :*

$$\begin{aligned}\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)&=-\sin(x)\\ \cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)&=\sin(x)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)&=\cos(x)\\ \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)&=-\cos(x)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\cos(x+\pi)&=-\cos(x)\\ \cos(x-\pi)&=-\cos(x)\end{aligned} \qquad \begin{aligned}\sin(x+\pi)&=-\sin(x)\\ \sin(x-\pi)&=-\sin(x)\end{aligned}$$

Valeurs remarquables



On en déduit le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	-

La fonction arctangente est la bijection réciproque de la fonction tangente de $\mathbb{R}$ dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. De plus,

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	limite en $+\infty$
$\arctan(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$

Les valeurs remarquables négatives de ces fonctions s'obtiennent par parité ou imparité.