Intégration sur un segment

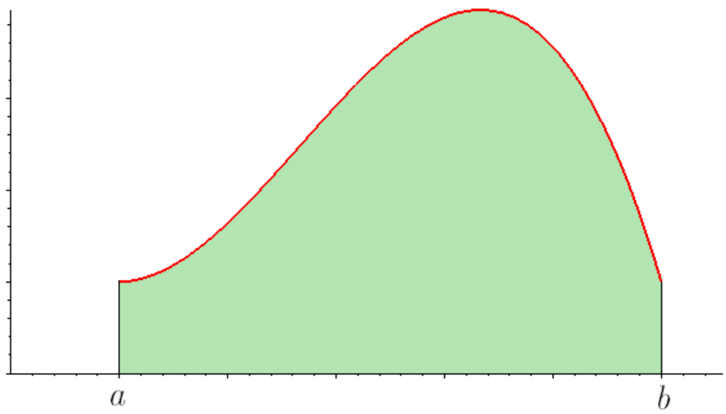
Table des matières

1 Intégrale et aire

1.1 Intégrale d'une fonction continue positive

Définition 1.1 : *Intégrale d'une fonction continue positive*

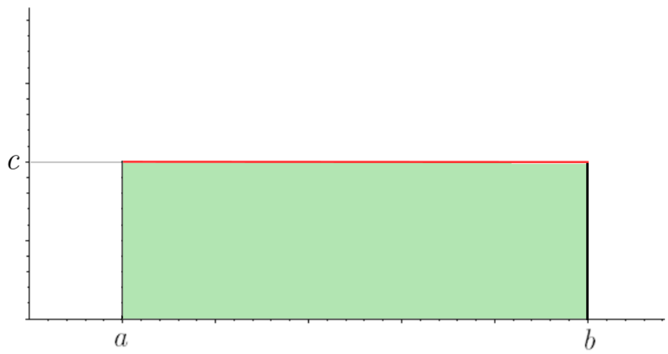
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. On appelle intégrale de f entre a et b et on note $\int_a^b f(t)\,dt$ l'aire de la surface délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $t = a$ et $t = b$.



Dans un premier temps, on se place dans des cas où le calcul de l'aire des surfaces est facile. Nous verrons par la suite comment calculer une intégrale pour des fonctions définissant des aires plus compliquées à calculer.

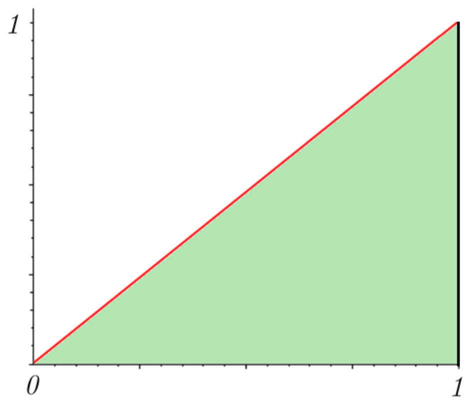
Exemple 1. *Soient $c > 0$ et $f : t \mapsto c$ une fonction constante sur $[a, b]$. $\int_a^b f(t)\,dt$ est l'aire d'un rectangle de longueur c et de largeur $b - a$:*

$$\int_a^b f(t)\,dt = c\,(b - a).$$



Exemple 2. *Soit $f : t \mapsto t$ sur $[0, 1]$. $\int_0^1 f(t)\,dt$ est l'aire d'un triangle rectangle de base 1 et de hauteur 1 :*

$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$



1.2 Extension à une fonction de signe quelconque

Définition 1.2 : *Intégrale d'une fonction continue négative*

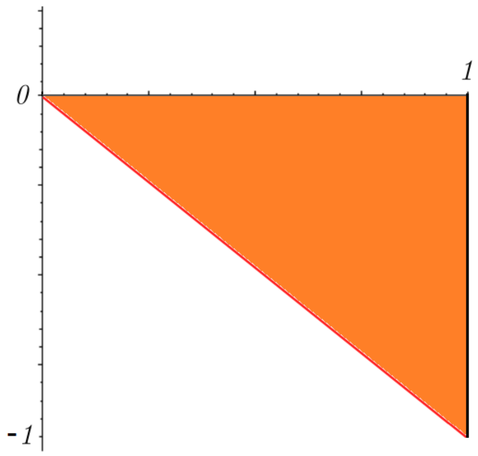
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction continue et négative sur $[a,b]$. On note $\mathbf{A}$ l'aire (géométrique) de la surface délimitée par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $t = a$ et $t = b$. Alors

$$\int_a^b f(t)dt = -\mathbf{A}.$$

On parlera alors d'**aire algébrique**.

Exemple 3. *Si f est la fonction $t \mapsto -t$ sur $[0,1]$, alors $\int_0^1 f(t)\,dt$ est l'opposé de l'aire (géométrique) d'un triangle rectangle de base 1 et de hauteur 1 :*

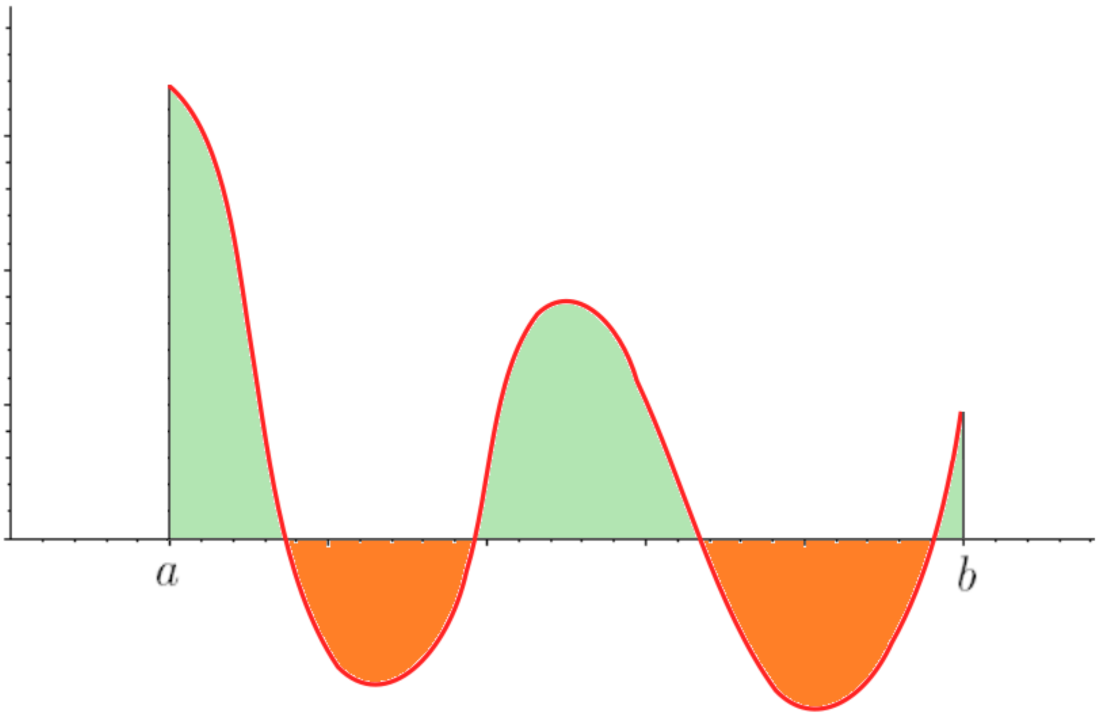
$$\int_0^1 f(t)\,dt = -\frac{1}{2}.$$



Si f est de signe quelconque sur $[a,b]$, alors on détermine les intervalles sur lesquels f est positive et ceux sur lesquels f est négative.

Définition 1.3 : *Intégrale d'une fonction continue*

Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et si f est une fonction continue sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ est égale à la somme des aires sous la courbe de f entre les droites $x = a$ et $x = b$, comptées positivement si la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, et négativement sinon.



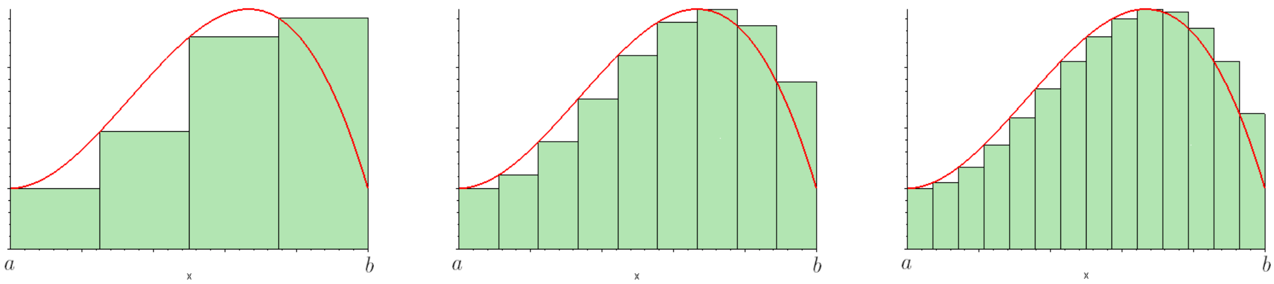
Exemple 4. *Si f est la fonction $t \mapsto -2t+2$ sur $[0,3]$, alors f est positive sur $[0,1]$ et négative sur $[1,3]$. On a l'aire algébrique (comptée positivement) d'un triangle rectangle de base 1 et de hauteur 2 et l'aire algébrique (comptée négativement) d'un triangle rectangle de base 2 et de hauteur 4 :*

$$\int_0^3 f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt + \int_1^3 f(t)\,dt = 1 - 4 = -3.$$

1.3 Méthode des rectangles et sommes de Riemann

Lorsque les formes géométriques sont simples, la définition d'intégrale en tant que surface est satisfaisante, mais comment faire lorsque la courbe de f devient plus complexe ? On approche alors l'aire sous la courbe de f par la somme d'aires de rectangles (l'aire d'un rectangle étant facile à calculer).

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On subdivise l'intervalle $[a,b]$ en n sous-intervalles afin d'approcher l'aire sous la courbe de f par la somme d'aires de rectangles :



Graphiquement, on constate que si n est assez grand, la somme des aires des rectangles s'approche de l'aire sous la courbe. En faisant tendre n vers l'infini, on définit l'intégrale de f comme étant la limite de la somme de leurs aires. On en déduit une méthode de calcul numérique d'intégrale, appelée **méthode des rectangles**. On détaillera cette méthode à la section 5.

La définition de l'intégrale comme aire sous la courbe permet d'avoir une bonne interprétation visuelle de l'intégrale mais ne permet pas de pouvoir manier facilement les intégrales. Pour cela, il faut d'abord définir la notion de primitive.

2 Primitives

2.1 Définition

Définition 2.1 : *Primitive d'une fonction réelle*

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I. On appelle **primitive** de f sur I toute fonction F dérivable sur I telle que

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x).$$

Toute fonction n'admet pas forcément de primitive.

Exemple 5. *La fonction partie entière n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.*

Exemple 6. *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0, & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{R}$.*

Théorème 2.2 : *Primitive d'une fonction continue*

Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive sur I.

Démonstration. Admis. □

Proposition 2.3 : *Ensemble des primitives d'une fonction continue*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et admettant une primitive F sur I. Alors l'ensemble de toutes les primitives de f est

$$\Big\{x \mapsto F(x) + k \text{ avec } k \in \mathbb{R}\Big\}$$

Démonstration. Si F et G sont deux primitives de la fonction f, alors $F - G$ est dérivable sur I et

$$\forall x \in I, \quad (F-G)'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$F - G$ est donc une fonction constante et continue sur I, donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \quad F(x) - G(x) = k.$$

□

On ne dira donc pas que F est la primitive de f sur I mais que F est une primitive de f sur I.

Exemple 7. *Déterminer toutes les primitives sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto -3x^2 + 4x + 1$.*

Solution.

Corollaire 2.4 : *Choix de la primitive*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

(i) Soient $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f sur I vérifiant

$$F(x_0) = y_0$$

(ii) Soient $a, b \in I$ fixés. Le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive choisie.

Exemple 8. *Déterminer l'unique primitive de $x \mapsto -3x^2 + 4x + 1$ qui prend la valeur 7 en $x = 1$.*

Solution.

2.2 Primitives des fonctions usuelles

Par lecture inverse du tableau des dérivées, on obtient une primitive des différentes fonctions usuelles (sur tout intervalle où elles sont définies).

$f(x)$	x^a $(a \neq -1)$	$\dfrac{1}{x}$	e^x	$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$1 + \tan^2(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$
$F(x)$	$\dfrac{x^{a+1}}{a+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	e^x	$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\tan(x)$	$\mathrm{Arctan}(x)$

Grâce à la formule de dérivation d'une composée (voir chapitre Dérivabilité), on en déduit les formules analogues pour déterminer des primitives de fonctions composées. Si u est une fonction dérivable alors :

$f(x)$	$u'(x)\ (u(x))^a$ $(a \neq -1)$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$u'(x)\, e^{u(x)}$	$u'(x)\ \cos(u(x))$	$-u'(x)\ \sin(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{1+u(x)^2}$
$F(x)$	$\dfrac{u(x)^{a+1}}{a+1}$	$\ln(\lvert u(x)\rvert)$	$e^{u(x)}$	$\sin(u(x))$	$\cos(u(x))$	$\mathrm{Arctan}(u(x))$

Exemple 9. *Calculer une primitive des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = x^2\, e^{-x^3+1}, \quad g(x) = \frac{\cos(x)}{2+\sin(x)} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{5\,x}{1+x^4}$$

Solution.

3 Intégrale d'une fonction continue sur un segment

3.1 Intégrale et primitives

Théorème 3.1 : *Primitive d'une fonction continue*

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. On définit la fonction F sur I par

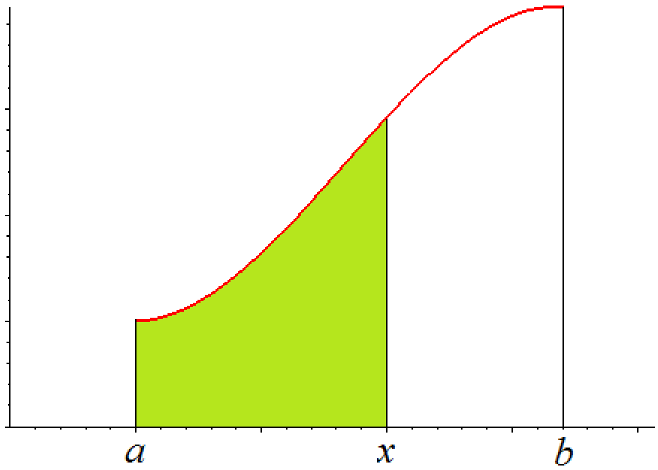
$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Alors F est de classe C^1 sur I et est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration. Dans cette démonstration, on ne fera que le cas f positive et croissante sur $I = [a, b]$.

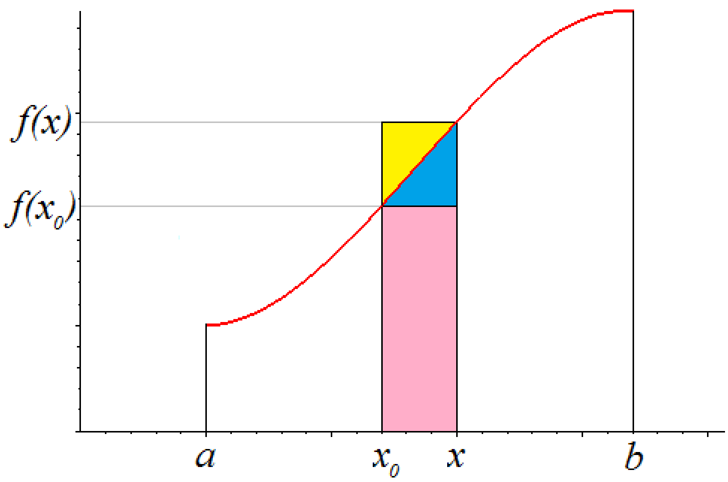
Pour $x \in [a, b]$, on pose $F(x)$ l'aire de la partie du plan délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $t = a$ et $t = x$. Ainsi d'après la définition 1.1 de l'intégrale, on a :

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$



Montrons que F est de classe C^1 sur $[a, b]$ et que $F' = f$. Soit $x_0 \in [a, b]$, on considère

— soit $x \in [a, b]$ tel que $x > x_0$, on peut encadrer l'aire comprise sous la courbe entre x_0 et x par deux rectangles. L'un (en rose) d'aire $f(x_0)(x - x_0)$ et l'autre (toutes les parties coloriées) d'aire $f(x)(x - x_0)$.



L'aire sous la courbe entre les droites $t = x_0$ et $t = x$ est $F(x) - F(x_0)$, on a alors :

$$f(x_0)(x - x_0) \leq F(x) - F(x_0) \leq f(x)(x - x_0)$$

Autrement dit,

$$f(x_0) \leq \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} \leq f(x)$$

La fonction f est continue en x_0 donc $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$. Donc d'après le théorème d'encadrement,

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

— de même si $x \in [a, b]$ tel que $x < x_0$, on obtient également

$$\lim_{x \to x_0^-} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

Ainsi on peut en conclure que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0).$$

F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$. Ceci étant vrai pour tout $x_0 \in [a, b]$, F est dérivable sur $[a, b]$ et

$$F' = f \text{ sur } [a, b].$$

F est donc une primitive de f. De plus, f est continue sur $[a, b]$, F est de classe C^1 sur $[a, b]$. Comme $F(a) = 0$ (l'aire à calculer est nulle), F est l'unique primitive de f s'annulant en a d'après le corollaire 2.4. □

Exemple 10. *La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2}$ n'a pas de primitive simple. Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'écrira donc*

$$F : x \mapsto \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

Corollaire 3.2 : *Intégrale d'une fonction continue sur un segment*

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I. Pour tout a et b éléments de I, on définit **l'intégrale de f entre a et b** le réel

$$\int_a^b f(t)\, dt = F(b) - F(a).$$

La fonction f est appelée **l'intégrande**.

Démonstration. D'après le théorème 3.1 précédent, la fonction $b \mapsto F(b) - F(a)$ est l'unique primitive de f s'annulant en a. □

Dans les calculs, le réel $F(b) - F(a)$ est noté $\Big[F(t)\Big]_a^b$ ou pour être plus précis $\Big[F(t)\Big]_{t=a}^b$.

Remarque 3.3 : *Intégrale indépendante du choix de la primitive*

D'après le corollaire 2.4, la définition d'une intégrale ne dépend pas du choix de la primitive.

Exemple 11. *Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{N}$:*

$$\int_a^b t^k\, dt = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

En particulier, pour $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 t^k\, dt = \frac{1}{k+1}.$$

Théorème 3.4 : *Fonction définie par une intégrale (hors programme)*

Soient deux fonctions u et v dérivables sur I, à valeurs dans J, et f une fonction continue sur J. Alors la fonction

$$\varphi : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\, dt$$

est bien définie et dérivable sur I, et de dérivée

$$\varphi'(x) = v'(x)\, f\left(v(x)\right) - u'(x) f\left(u(x)\right).$$

Démonstration. D'après la définition de l'intégrale, si F est une primitive de f, on a, pour tout x,

$$\varphi(x) = F(v(x)) - F(u(x)).$$

φ est donc la somme de deux composées de fonctions dérivables (F et v, et $-F$ et u). Elle est donc dérivable, et sa dérivée est

$$\varphi'(x) = v'(x)\, f\left(v(x)\right) - u'(x) f\left(u(x)\right).$$

□

Comme cette démonstration est assez simple, il est en général conseillé de redémontrer ce théorème à chaque fois, adapté au cas courant. Cela évite de faire des erreurs, et rend l'exposé plus lisible.

Exemple 12. *Si on définit la fonction φ par :*

$$\varphi : x \mapsto \int_x^{x^2} e^t\, dt = \int_0^{x^2} e^t\, dt - \int_0^x e^t\, dt$$

φ est bien définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et de dérivée

$$\varphi'(x) = 2\, x\, e^{x^2} - e^x.$$

3.2 Propriétés de l'intégrale

3.2.1 Premières propriétés

Remarque 3.5 : *Variable muette*

Comme pour l'indice d'une somme, la lettre utilisée pour la notation de l'intégrale est muette :

$$\int_a^b f(t)\, dt = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(y)\, dy.$$

Propriété 3.6 : *Intégrale sur un intervalle réduit à un point*

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si $a \in I$, alors

$$\int_a^a f(t)\, dt = 0.$$

Démonstration. L'aire de la surface à calculer étant nulle, l'intégrale est donc nulle. □

Propriété 3.7 : *Sens de lecture*

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si $(a,b) \in I^2$, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt = -\int_b^a f(t)\,dt.$$

Démonstration. On a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = -\left(F(a) - F(b)\right) = -\int_b^a f(t)\,dt.$$

□

Exemple 13. *On a :*

$$\int_1^0 t\,dt = -\int_0^1 t\,dt = -\frac{1}{2}.$$

3.2.2 Relation de Chasles

Propriété 3.8 : *Relation de Chasles*

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si $(a,b,c) \in I^3$, alors

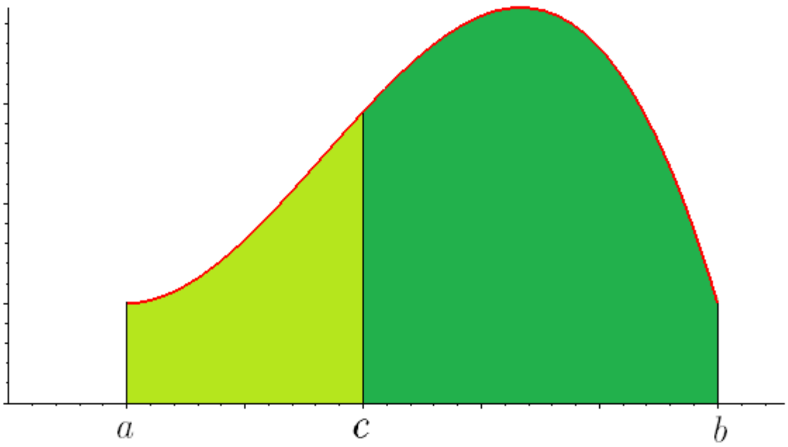
$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

Dans cette propriété, il n'est pas nécessaire de supposer $a < c < b$.

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. On a

$$\int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

□



Proposition 3.9 : *Généralisation de la relation de Chasles*

Si f est une fonction continue sur un intervalle I et si $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ sont des éléments de I, alors

$$\int_{a_0}^{a_n} f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt.$$

Démonstration. À faire en exercice par récurrence. □

Exemple 14. *Calculer* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \int_{k}^{k+1} f(t)\,dt$.

Solution.

3.2.3 Linéarité

Propriété 3.10 : *Linéarité de l'intégrale*

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, $(a,b) \in I^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\;dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt.$$

Plus généralement, on a pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\;dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt.$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que si F une primitive de f et G une primitive de g, alors par linéarité de la dérivation $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$. □

Exemple 15. *En utilisant la linéarité de l'intégrale, on obtient :*

$$\int_0^3 \left(6\,t^2 + e^t + 2\right)\,dt = 6\int_0^3 t^2\,dt + \int_0^3 e^t\,dt + 2\int_0^3 1\,dt.$$

La formule $\displaystyle\int_a^b (f(t)\times g(t))\;dt = \int_a^b f(t)\,dt \times \int_a^b g(t)\,dt$ est en revanche grossièrement fausse.

Exemple 16. *En effet, on a :*

$$\int_0^1 t^2\,dt = \frac{1}{3} \qquad \text{et} \qquad \left(\int_0^1 t\,dt\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Proposition 3.11 : *Généralisation de la linéarité*

Soient $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions continues sur un intervalle I et $a, b \in I$, alors

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{n} f_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k(t)\,dt.$$

Démonstration. À faire en exercice par récurrence. □

Exemple 17. *Montrer que*

$$\int_{-1}^{0} \frac{1-t^n}{1-t}\,dt = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}.$$

Solution.

3.2.4 Positivité

Propriété 3.12 : *Positivité de l'intégrale*

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(t)\,dt \geq 0.$$

De plus,

$$\int_a^b f(t)\,dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall t \in [a, b],\ f(t) = 0.$$

Avant d'appliquer cette propriété, il faut s'assurer que les bornes sont "dans le bon sens".

Démonstration. Soit F une primitive de f sur $[a, b]$. Comme f est positive, F est croissante. Ainsi

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) \geq 0.$$

De plus, si l'intégrale est nulle, cela signifie que $F(b) = F(a)$. De plus comme F est croissante, alors F est constante sur $[a, b]$. D'où f est nulle sur $[a, b]$. □

Corollaire 3.13 : *Stricte positivité de l'intégrale*

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. S'il existe $t_0 \in [a, b]$ tel que $f(t_0) > 0$, alors

$$\int_a^b f(t)\,dt > 0.$$

Démonstration. C'est la contraposée de la propriété 3.12. □

Exemple 18.

$$\int_0^1 e^{\sin(t)} \left(t^2 + 1\right) dt > 0.$$

3.2.5 Croissance

Propriété 3.14 : *Croissance de l'intégrale*

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$. Alors

$$\forall t \in [a, b],\ f(t) \leq g(t) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b g(t)\,dt.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la propriété 3.12 à la fonction $g - f$. On conclut via la linéarité de l'intégrale. □

Exemple 19. *Soient φ une fonction continue et positive sur $[0, 1]$ et (u_n) la suite définie par :*

$$u_n = \int_0^1 t^n\, \varphi(t)\,dt.$$

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0.$

Solution.

3.2.6 Inégalité de la moyenne

Propriété 3.15 : *Inégalité de la moyenne*

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$. On note $m = \min_{a \leq t \leq b} f(t)$ et $M = \max_{a \leq t \leq b} f(t)$. Alors

$$(b-a)\,m \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq (b-a)\,M.$$

Le réel $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est appelé la **valeur moyenne de f sur** $[a,b]$ et est compris entre m et M.

Démonstration. Comme f est continue sur le segment $[a,b]$, d'après le théorème des bornes :

$$\forall t \in [a,b], \quad m \leq f(t) \leq M.$$

On utilise la propriété 3.14 pour pouvoir intégrer cet encadrement sur $[a,b]$

$$\int_a^b m\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b f(t)\,dt \leq \int_a^b M\,\mathrm{d}t.$$

On conclut avec $\displaystyle\int_a^b m\,\mathrm{d}t = m\,(b-a)$ et $\displaystyle\int_a^b M\,\mathrm{d}t = M\,(b-a)$. □

Exemple 20. *La valeur moyenne de la fonction $x \mapsto x^2$ sur l'intervalle $[-2,4]$ est*

$$\frac{1}{4-(-2)}\int_{-2}^4 t^2\,dt = \frac{1}{6}\int_{-2}^4 t^2\,dt = \frac{4^3-(-2)^3}{18} = \frac{64+8}{18} = 4.$$

3.2.7 Inégalité triangulaire

Propriété 3.16 : *Inégalité triangulaire pour l'intégrale*

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$. Alors

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Démonstration. On note f_+ et f_- les fonctions

$$\forall t \in [a,b], \quad f_+(t) = \max(f(t),0) \;\text{ et }\; f_-(t) = \min(f(t),0).$$

On a alors

$$\forall t \in [a,b], \quad f(t) = f_+(t) + f_-(t) \quad \text{et} \quad |f(t)| = f_+(t) - f_-(t).$$

f_+ et f_- sont continues sur $[a,b]$, on peut donc considérer leurs intégrales de a à b qui sont, respectivement, positive et négative. Ainsi d'après l'inégalité triangulaire pour les réels

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| = \left|\int_a^b f_+(t)\,dt + \int_a^b f_-(t)\,dt\right| \leq \left|\int_a^b f_+(t)\,dt\right| + \left|\int_a^b f_-(t)\,dt\right|$$

on conclut avec

$$\left|\int_a^b f_+(t)\,dt\right| + \left|\int_a^b f_-(t)\,dt\right| = \int_a^b f_+(t)\,dt - \int_a^b f_-(t)\,dt = \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

□

Exemple 21. *Soient φ une fonction continue sur $[0,1]$ et (u_n) la suite définie par :*

$$u_n = \int_0^1 t^n \varphi(t)\, dt.$$

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Solution.

4 Méthodes de calcul d'intégrale

4.1 Intégration par parties

Théorème 4.1 : *Intégration par parties*

Soient u et v deux fonctions de classe C^1 sur un segment $[a,b]$. On a

$$\int_a^b u'(t)\, v(t)\, dt = \Big[u(t)\, v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)\, v'(t)\, dt$$

Démonstration. Puisque $(uv)' = u'v + uv'$ alors

$$\int_a^b (uv)'(t)\, dt = \int_a^b u'(t)\, v(t)\, dt + \int_a^b u(t)\, v'(t)\, dt$$

De plus, $\displaystyle\int_a^b (uv)'(t)\, dt = \Big[u(t)\, v(t)\Big]_a^b$, ce qui nous permet de conclure. □

L'intégration par parties permet de transformer l'intégrale d'un produit de fonctions en d'autres intégrales, dans un but de simplification du calcul.

Exemple 22. *Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction logarithme.*

Solution.

Exemple 23. *Calculer pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x t\, e^{-t}\, dt$.*

Solution.

4.2 Changement de variable

Théorème 4.2 : *Changement de variable*

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et ψ une fonction de classe C^1 et strictement monotone sur $[\alpha,\beta]$ telle que $\psi([\alpha,\beta]) \subset I$. On a

$$\int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta f(\psi(t))\, \psi'(t)\, dt$$

Démonstration. Il suffit de remarquer que si F est une primitive de f, alors $F \circ \psi$ est de classe C^1 sur $[\alpha,\beta]$ et

$$\forall t \in [\alpha,\beta], \quad (F\circ\psi)'(t) = f(\psi(t))\, \psi'(t)$$

puis

$$\int_\alpha^\beta f(\psi(t))\, \psi'(t)\, dt = \Big[(F\circ\psi)(t)\Big]_\alpha^\beta = F(\psi(\beta)) - F(\psi(\alpha)) = \Big[F(x)\Big]_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} = \int_{\psi(\alpha)}^{\psi(\beta)} f(x)\, dx$$

□

Dans les hypothèses de ce théorème, on impose que ψ soit une fonction strictement monotone (hypothèse non utilisée par la démonstration du théorème). Ainsi, d'après le théorème de la bijection monotone, ψ est bijective de $[\alpha, \beta]$ dans $\psi\left([\alpha, \beta]\right)$. Suivant les situations, il faudra considérer le changement de variable suivant

- soit l'ancienne variable en fonction de la nouvelle.
- soit la nouvelle variable en fonction de l'ancienne.

Méthode 4.3 : *Situation : ancienne variable en fonction de la nouvelle*

Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, on pose : $x = \psi(t)$ avec ψ de classe C^1 et strictement monotone de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$.

(i) (Changement de variable)

$$x = \psi(t) \quad \Leftrightarrow \quad t = \psi^{-1}(x)$$

Le calcul de ψ^{-1} n'est pas toujours nécessaire et n'est utile que pour l'obtention des nouvelles bornes.

(ii) (Elément différentiel)

$$dx = \psi'(t)\,dt$$

(iii) (Nouvelles bornes)

$$\text{si } x = a \text{ alors } t = \boxed{\psi^{-1}(a)}$$

$$\text{si } x = b \text{ alors } t = \boxed{\psi^{-1}(b)}$$

(iv) (Nouvelle fonction à intégrer)

$$f(x) = f\left(\psi(t)\right)$$

(v) (Conclusion)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\boxed{\psi^{-1}(a)}}^{\boxed{\psi^{-1}(b)}} f\left(\psi(t)\right)\,\psi'(t)\,dt$$

Exemple 24. *Calculons l'intégrale suivante :*

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

Effectuons le changement de variable $x = \sin(t) = \psi(t)$, ψ *de classe* C^1 *et strictement croissante de* $[-\pi/2, \pi/2]$ *dans* $[-1, 1]$.

(i) (Changement de variable) On ne calcule pas ψ^{-1} *dans ce cas (hors programme)*

$$x = \sin(t)$$

(ii) (Elément différentiel)

$$dx = \cos(t)\,dt$$

(iii) (Nouvelles bornes)

$$\textit{si } x = -1 \ \textit{ alors } \ t = -\pi/2$$

$$\textit{si } x = 1 \ \textit{ alors } \ t = \pi/2$$

(iv) (Nouvelle fonction à intégrer)

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - (\sin(t))^2)} = \sqrt{(\cos(t))^2)} = |\cos(t)| = f\left(\psi(t)\right)$$

(v) (Conclusion)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\psi^{-1}(a)}^{\psi^{-1}(b)} f\left(\psi(t)\right)\,\psi'(t)\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\cos(t)|\,\cos(t)\,dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos(2t) + 1}{2}\,dt = \cdots = \frac{\pi}{2}$$

Méthode 4.4 : *Situation : nouvelle variable en fonction de l'ancienne (cas simple)*

Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, on pose : $t = \varphi(x)$ avec φ de classe C^1 et strictement monotone de $[a,b]$ dans $\varphi([a,b])$. On suppose que φ' ne s'annule pas sur $[a,b]$ et que l'on puisse calculer φ^{-1}.

(i) (Changement de variable)

$$t = \varphi(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \varphi^{-1}(t)$$

(ii) (Elément différentiel) Comme φ' ne s'annule pas, alors φ^{-1} est dérivable,

$$dt = \varphi'(x)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad dx = \left(\varphi^{-1}\right)'(t)\,dt$$

(iii) (Nouvelles bornes)

$$\text{si } x = a \text{ alors } t = \boxed{\varphi(a)}$$

$$\text{si } x = b \text{ alors } t = \boxed{\varphi(b)}$$

(iv) (Nouvelle fonction à intégrer)

$$f(x) = f\left(\varphi^{-1}(t)\right)$$

(v) (Conclusion) D'après le théorème 4.2 avec $\psi = \varphi^{-1}$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\boxed{\varphi(a)}}^{\boxed{\varphi(b)}} f\left(\varphi^{-1}(t)\right) \left(\varphi^{-1}\right)'(t)\,dt$$

Les changements de variable affines vérifient ces propriétés, on utilisera donc cette méthode pour un changement de variable affine lorsque la nouvelle variable est écrite en fonction de l'ancienne.

Exemple 25. *Calculons l'intégrale suivante :*

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{2x+1}}\,dx$$

Effectuons le changement de variable $t = 2x+1 = \varphi(x)$, φ de classe C^1 et strictement croissante de $[0,1]$ dans $[1,3]$.

(i) (Changement de variable)

$$t = 2x+1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{t-1}{2}$$

(ii) (Elément différentiel)

$$dt = 2\,dx \Leftrightarrow \quad dx = \frac{1}{2}dt$$

(iii) (Nouvelles bornes)

$$\text{si } x = 0 \text{ alors } t = 1$$

$$\text{si } x = 1 \text{ alors } t = 3$$

(iv) (Nouvelle fonction à intégrer)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x+1}} = \frac{\frac{t-1}{2}}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) = f\left(\varphi^{-1}(t)\right)$$

(v) (Conclusion)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f\left(\varphi^{-1}(t)\right)\left(\varphi^{-1}\right)'(t)\,dt = \int_1^3 \frac{1}{2}\left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)\frac{1}{2}\,dt = \cdots = \frac{1}{3}$$

Exemple 26. *Calculer l'intégrale suivante à l'aide du changement de variable $t = x^2$:*

$$\int_1^2 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$$

Solution.

Méthode 4.5 : *Situation : nouvelle variable en fonction de l'ancienne (cas complexe)*

Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, on pose : $t = \varphi(x)$ avec φ de classe C^1 et strictement monotone de $[a,b]$ dans $\varphi([a,b])$. On suppose que φ' s'annule ou que φ^{-1} ne peut pas être calculée.

(i) (Changement de variable)

$$t = \varphi(x)$$

(ii) (Elément différentiel)

$$dt = \varphi'(x)\,dx$$

(iii) (Nouvelles bornes)

$$\text{si } x = a \text{ alors } t = \boxed{\varphi(a)}$$

$$\text{si } x = b \text{ alors } t = \boxed{\varphi(b)}$$

(iv) (Nouvelle fonction à intégrer) On détermine une fonction g définie sur $\varphi([a,b])$ telle que

$$\forall x \in [a,b], \quad f(x) = g(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

(v) (Conclusion) D'après le théorème 4.2 pour la fonction g avec $\psi = \varphi$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx = \int_{\boxed{\varphi(a)}}^{\boxed{\varphi(b)}} g(t)\,dt$$

Exemple 27. *Calculons l'intégrale suivante :*

$$\int_0^{\pi/2} (\sin(x))^3 \cos(x)\,dx$$

Effectuons le changement de variable $t = \sin(x) = \varphi(x)$, φ de classe C^1 et strictement croissante de $[0,\pi/2]$ dans $[0,1]$.

(i) (Changement de variable) On ne calcule pas φ^{-1} dans ce cas (hors programme)

$$t = \sin(x)$$

(ii) (Elément différentiel)

$$dt = \cos(x)\,dx$$

(iii) (Nouvelles bornes)

$$\textit{si } x = 0 \textit{ alors } t = 0$$

$$\textit{si } x = \pi/2 \textit{ alors } t = 1$$

(iv) (Nouvelle fonction à intégrer) Dans ce cas, φ' s'annule sur $[0,\pi/2]$, on remarque que

$$f(x) = (\sin(x))^3 \cos(x) = (\sin(x))^3\,\varphi'(x) = g(\varphi(x))\,\varphi'(x) \qquad \textit{en posant } g(t) = t^3$$

(v) (Conclusion)

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} g(t)\,dt = \int_0^1 t^3\,dt = \frac{1}{4}$$

Remarque 4.6 : *Changements de variable dans les énoncés*

Les changements de variable non affines seront indiqués dans les sujets (DS, DM, concours....).

Propriété 4.7 : *Intégrale et parité*

Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et f une fonction continue sur $[-a, a]$.

(i) Si f est paire,

$$\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 2 \int_{0}^{a} f(t)\, dt.$$

(ii) Si f est impaire,

$$\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 0.$$

Démonstration. Avec la relation de Chasles et le changement de variable $u = -t$, on a

$$\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = \int_{-a}^{0} f(t)\, dt + \int_{0}^{a} f(t)\, dt = -\int_{a}^{0} f(-u)\, du + \int_{0}^{a} f(t)\, dt = \int_{0}^{a} \Big(f(-t) + f(t)\Big)\, dt.$$

On conclut facilement suivant la parité de f. □

Exemple 28. *Pour $x > 0$, calculons l'intégrale suivante :*

$$\int_{-x}^{x} t\, e^{-t^2}\, dt.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $f(t) = t\, e^{-t^2}$. Alors

$$f(-t) = -t\, e^{-(-t)^2} = -t\, e^{-t^2} = -f(t).$$

Ainsi f est impaire et comme l'intervalle $[-x, x]$ est centré en 0, on a

$$\int_{-x}^{x} t\, e^{-t^2}\, dt = 0.$$

5 Méthode des rectangles et sommes de Riemann

5.1 Convergence des sommes de Riemann

Précisons désormais la méthode des rectangles. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On considère la subdivision de l'intervalle $[a, b]$ définie par :

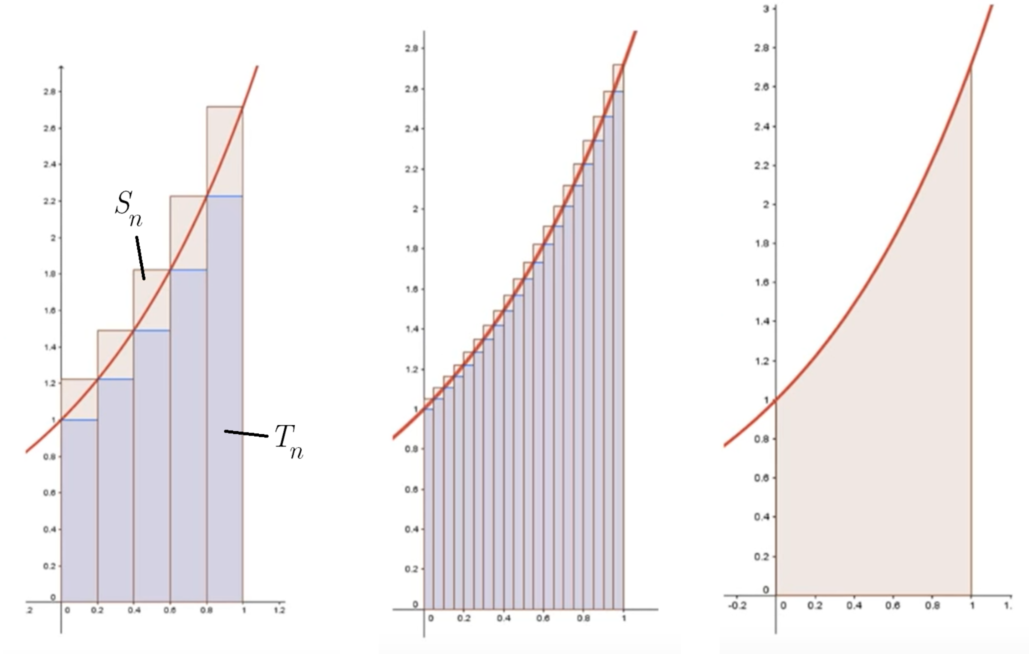
$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad a_k = a + k\frac{b-a}{n}.$$

Définition 5.1 : *Sommes de Riemann associées*

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **sommes de Riemann associées à** f sur $[a, b]$, les sommes suivantes :

$$S_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad T_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)$$

Graphiquement, $\dfrac{b-a}{n}$ est la largeur de chaque rectangle et $f\left(a + k\dfrac{b-a}{n}\right)$ est la hauteur d'un rectangle.



Théorème 5.2 : *Convergence des sommes de Riemann*

Si f une fonction continue sur $[a,b]$, alors les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$. Autrement dit,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Démonstration. On ne fera que la démonstration du cas où f est de classe C^1. On pose pour $k \in [\![0,n]\!]$,

$$a_k = a + k\frac{b-a}{n}.$$

On remarque que

$$T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}-a_k) f(a_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(a_k)\,dt.$$

Ainsi d'après la relation de Chasles,

$$\int_a^b f(t)\,dt - T_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\int_{a_k}^{a_{k+1}} f(t)\,dt - \frac{b-a}{n} f(a_k)\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t)-f(a_k))\,dt.$$

Encadrons pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\displaystyle\int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t)-f(a_k))\,dt$.

Comme f' est continue sur $[a,b]$, d'après le théorème des bornes, il existe $(m,M)\in\mathbb{R}^2$ tel que,

$$\forall t \in [a,b], \quad m \leq f'(t) \leq M$$

Or par la propriété 3.15 de l'inégalité de la moyenne, pour tout $t\in[a_k,a_{k+1}]$, on a

$$m(t-a_k) \leq f(t) - f(a_k) \leq M(t-a_k).$$

Ainsi, en intégrant sur $[a_k,a_{k+1}]$, on obtient l'inégalité

$$m\int_{a_k}^{a_{k+1}} (t-a_k)\,dt \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t)-f(a_k))\,dt \leq M\int_{a_k}^{a_{k+1}} (t-a_k)\,dt.$$

Comme $\int_{a_k}^{a_{k+1}} (t - a_k)\, dt = \left[\frac{(t-a_k)^2}{2}\right]_{a_k}^{a_{k+1}} = \frac{(a_{k+1}-a_k)^2}{2}$, alors

$$m\frac{(a_{k+1}-a_k)^2}{2} \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(a_k))\; dt \leq M\frac{(a_{k+1}-a_k)^2}{2}.$$

Comme $a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$, alors

$$m\frac{(b-a)^2}{2n^2} \leq \int_{a_k}^{a_{k+1}} (f(t) - f(a_k))\; dt \leq M\frac{(b-a)^2}{2n^2}.$$

Ainsi, en sommant pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on obtient

$$m\frac{(b-a)^2}{2n} \leq \int_a^b f(t)\, dt - T_n \leq M\frac{(b-a)^2}{2n}.$$

On conclut via le théorème d'encadrement.
De même, on montre la convergence de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. □

Corollaire 5.3 : *Cas simple de convergence de sommes de Riemann*

Si f est une fonction continue sur $[0, 1]$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t)\, dt.$$

Exemple 29. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

Calculer la limite de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

Solution.

5.2 Programmation de la méthode des rectangles

Informatique 5.4 : *Python : méthode des rectangles*

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. On suppose que f, a, b et n ont été préalablement implémentées. Afin de calculer une approximation de $\int_a^b f(t)\, dt$, on peut utiliser la méthode des rectangles en calculant une des sommes de Riemann pour un n assez grand.

```
S=0
for k in range(1,n+1) :
  S=S+f(a+k*(b-a)/n) # on ajoute la longueur de chaque rectangle
S=S*(b-a)/n          # on multiplie par la largeur des rectangles
print(S)
```

Exemple 30. *Calculer une valeur approchée de $\int_0^1 \frac{4}{1+t^2}\, dt = \pi$. On calcule donc pour $n \in \mathbb{N}^*$ assez grand,*

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{4}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

```
import numpy as np
n=10000
def f(x):
   return 4/(1+x**2)
S=0
for k in range(1,n+1) :
  S=S+f(k/n)
S=S*1/n
print(S)
```

Python renvoie 3.14149265192314*.*