Logique et raisonnements mathématiques

Table des matières

1 Eléments de logique

1.1 Propositions

Définition 1.1 : *Proposition*

Une **proposition** $\mathcal{P}$ est une phrase mathématique qui est soit vraie, soit fausse.

Exemple 1. "$2 < \pi$" *est une proposition vraie.*

Exemple 2. *"Pour tout réel x, $x+1$ est positif." est une proposition fausse.*

Exemple 3. "$2\,(x + e^x)$" *n'est pas une proposition.*

Une proposition est donc un énoncé pour lequel on peut répondre sans ambiguïté et sans renseignement complémentaire à la question : "Est-il vrai ou bien est-il faux ?".

Remarque 1.2 : *Ecriture*

Lorsque l'on écrit qu'une proposition mathématique est vraie, on écrira indifféremment "$\mathcal{P}$" ou "$\mathcal{P}$ est vraie".

Remarque 1.3 : *Proposition portant sur une variable*

Si l'énoncé de la proposition porte sur une variable x, la proposition pourra être notée $\mathcal{P}(x)$.

Exemple 4. *On considère la proposition $\mathcal{P}(n)$: "n est un multiple de 6".*
$\mathcal{P}(12)$ est une proposition vraie, mais $\mathcal{P}(11)$ est fausse.

1.2 Quantificateurs

1.2.1 Quantificateur universel

Définition 1.4 : *Quantificateur universel*

Soient E un ensemble et $\mathcal{P}(x)$ une proposition définie pour tout élément x de E. Si $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour tout élément x de E, alors on écrit :

$$\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x).$$

Cette proposition se lit : "pour tout x appartenant à E, $\mathcal{P}(x)$ est vraie".
Le symbole $\forall$ est appelé **quantificateur universel**.

Exemple 5. "$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2+1 > 0$" *se lit : "pour tout réel x, x^2+1 est strictement positif".*

1.2.2 Quantificateur existentiel

Définition 1.5 : *Quantificateur existentiel*

Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(x)$ une proposition définie pour tout élément x de E. Si $\mathcal{P}(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E, alors on écrit :

$$\exists x \in E, \mathcal{P}(x).$$

Cette proposition se lit : "il existe (au moins) un x appartenant à E tel que $\mathcal{P}(x)$ soit vraie".
Le symbole $\exists$ est appelé **quantificateur existentiel**.

Exemple 6. "$\exists x \in \mathbb{R}, x^2 - 1 = 0$" *se lit : "il existe au moins un réel x tel que $x^2 - 1$ est égal à 0" (il s'agit de -1 et 1).*

Définition 1.6 : *Symbole d'unicité*

Lorsque l'on souhaite préciser qu'il n'existe qu'un seul x dans E tel que $\mathcal{P}(x)$ soit vraie, on utilise un point d'exclamation :

$$\exists! x \in E, \mathcal{P}(x).$$

Cette proposition se lit : "il existe un unique x appartenant à E tel que $\mathcal{P}(x)$ soit vraie".

Exemple 7. "$\exists! x \in \mathbb{R}_+, x^2 - 1 = 0$" *se lit : "il existe un unique x positif tel que $x^2 - 1$ est égal à 0" (il s'agit de 1).*

Dans un énoncé, l'expression "il existe un x" signifiera toujours implicitement qu'il en existe au moins un. L'unicité sera explicitement mentionnée.

1.3 Connecteurs logiques

1.3.1 Equivalence

Définition 1.7 : *Equivalence de deux propositions*

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. **L'équivalence de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$**, notée $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ et lue " $\mathcal{P}$ équivaut à $\mathcal{Q}$ ", est la proposition qui est vraie si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ont la même valeur de vérité, soit toutes les deux vraies soit toutes les deux fausses.

Remarque 1.8 : *Table de vérité*

Lorsque l'on considère des opérations logiques sur des propositions, on utilise souvent une table de vérité. La table de vérité pour l'équivalence est la suivante :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple 8. *Pour $x \in \mathbb{R}$, on a " $(x^2 = 1) \Leftrightarrow (x = 1$ ou $x = -1)$ ".*

Remarque 1.9 : *Ecriture*

On utilise des parenthèses pour regrouper des propositions connectées pour éviter les ambiguïtés.

Remarque 1.10 : *Vocabulaire*

Lorsque l'on a $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est vraie si, et seulement si, $\mathcal{Q}$ est vraie.

1.3.2 Négation d'une proposition

Définition 1.11 : *Négation d'une proposition*

Soit $\mathcal{P}$ une proposition. La proposition contraire de $\mathcal{P}$, notée non($\mathcal{P}$) (ou $\neg\mathcal{P}$), et appelée **négation de** $\mathcal{P}$ est la proposition qui est vraie si $\mathcal{P}$ est fausse et qui est fausse si $\mathcal{P}$ est vraie.

Remarque 1.12 : *Table de vérité*

La table de vérité pour la négation est la suivante :

$\mathcal{P}$	non($\mathcal{P}$)
V	F
F	V

Exemple 9. *Pour $x \in \mathbb{R}$, la négation de "$x \geq 2$" est "$x < 2$".*

Propriété 1.13 : *Double négation*

La proposition non(non($\mathcal{P}$)) est la proposition $\mathcal{P}$.

Propriété 1.14 : *Négation et quantificateurs*

La négation de "$\forall x \in E$, $\mathcal{P}(x)$" est "$\exists x \in E$, non($\mathcal{P}(x)$)".
La négation de "$\exists x \in E$, $\mathcal{P}(x)$" est "$\forall x \in E$, non($\mathcal{P}(x)$)".

Exemple 10. *La négation de "$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leq 1$" est "$\exists x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 1$".*

Exemple 11. *La négation de "au moins un élève de la classe n'a pas obtenu la moyenne" est "tous les élèves de la classe ont obtenu la moyenne".*

1.3.3 Disjonction

Définition 1.15 : *Disjonction de deux propositions*

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. La **disjonction de** $\mathcal{P}$ **et** $\mathcal{Q}$, notée $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ et lue "$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$", est la proposition qui est vraie dès que l'une au moins des propositions $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$ est vraie.

Remarque 1.16 : *Table de vérité*

La table de vérité pour la disjonction est la suivante :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Remarque 1.17 : *"Ou" inclusif*

La disjonction correspond à ce que l'on appelle en français un "*ou*" inclusif, puisque l'une au moins des deux propositions est vraie, voire éventuellement les deux.

Exemple 12. *On dispose d'un jeu de cartes duquel on tire une carte au hasard. On considère $\mathcal{P}$ la proposition "cette carte est un as" et $\mathcal{Q}$ la proposition "cette carte est un cœur", alors la proposition $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ est vraie si la carte tirée est un as ou bien un cœur (en particulier elle est vraie pour l'as de cœur).*

1.3.4 Conjonction

Définition 1.18 : *Conjonction de deux propositions*

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. La **conjonction de** $\mathcal{P}$ **et** $\mathcal{Q}$, notée $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ et lue "$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$", est la proposition qui est vraie si les propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies.

Remarque 1.19 : *Table de vérité*

La table de vérité pour la conjonction est la suivante :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 13. *On dispose d'un jeu de cartes duquel on tire une carte au hasard. On considère $\mathcal{P}$ la proposition "cette carte est une dame" et $\mathcal{Q}$ la proposition "cette carte est un trèfle", alors la proposition $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$ est vraie si la carte tirée est la dame de trèfle.*

Théorème 1.20 : *Lois de Morgan*

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \text{non}\,(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) &\quad\Leftrightarrow\quad (\text{non}(\mathcal{P}) \vee \text{non}(\mathcal{Q})) \\ \text{non}\,(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) &\quad\Leftrightarrow\quad (\text{non}(\mathcal{P}) \wedge \text{non}(\mathcal{Q})) \end{aligned}$$

Démonstration. À démontrer en exercice en utilisant les tables de vérité. □

Exemple 14. *On dispose d'un jeu de cartes duquel on tire une carte au hasard. On considère $\mathcal{P}$ la proposition "cette carte est une dame" et $\mathcal{Q}$ la proposition "cette carte est un trèfle", alors la proposition non$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$ est vraie si la carte tirée n'est pas la dame de trèfle. La carte tirée n'est donc soit pas une dame soit pas un trèfle. Autrement dit, la proposition (non$(\mathcal{P}) \vee$ non$(\mathcal{Q})$) est vraie.*

Théorème 1.21 : *Distributivité*

Soient $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ trois propositions. On a les équivalences suivantes :

$$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{P} \vee \mathcal{R}) \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$$

$$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}) \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$$

Démonstration. À démontrer en exercice en utilisant les tables de vérité. □

1.3.5 Implication

Définition 1.22 : *Implication de deux propositions*

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. **L'implication de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{Q}$**, notée $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et lue "$\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$", signifie que si $\mathcal{P}$ est vraie alors $\mathcal{Q}$ est vraie.

Remarque 1.23 : *Table de vérité*

La table de vérité pour l'implication est la suivante :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple 15. *Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $(x = 1) \Rightarrow (x^2 = 1)$.*

Remarque 1.24 : *Terminologie*

Il y a un grand nombre de formulations différentes de l'implication. Toutes les suivantes sont fréquemment utilisées, il est donc important de bien les connaître.

- $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$,
- $\mathcal{P}$ implique $\mathcal{Q}$,
- si $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{Q}$,
- pour que $\mathcal{Q}$, il suffit que $\mathcal{P}$,
- $\mathcal{P}$ est une **condition suffisante** pour $\mathcal{Q}$,
- si $\mathcal{P}$, il faut que $\mathcal{Q}$,
- $\mathcal{Q}$ est une **condition nécessaire** pour $\mathcal{P}$.

Aussi, l'implication $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ est appelée **implication réciproque** de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

L'implication directe peut être vraie sans que sa réciproque soit vraie.

Exemple 16. *Soit x un entier plus grand que 3. On considère $\mathcal{P}$ la proposition "x est premier" et $\mathcal{Q}$ la proposition "x est impair". On a bien $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ mais on n'a pas $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.*

Propriété 1.25 : *Négation d'une implication*

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On a alors :

$$\text{non}\,(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{P} \wedge \text{non}(\mathcal{Q}))$$

Démonstration. En effet, d'après la table de vérité 1.23 de l'implication, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ est fausse si et seulement si $\mathcal{Q}$ est fausse et $\mathcal{P}$ est vraie. □

Propriété 1.26 : *Implication*

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On a alors :

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{non}(\mathcal{P}) \vee \mathcal{Q})$$

On peut facilement utiliser les tables de vérité pour démontrer cette propriété, mais on peut également proposer la démonstration suivante.

Démonstration. D'après la propriété 1.25 précédente,

$$\text{non}\,(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{P} \wedge \text{non}(\mathcal{Q}))\,.$$

D'après la propriété 1.13 de double négation et le théorème 1.20 sur les lois de Morgan,

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad \text{non}\,(\mathcal{P} \wedge \text{non}(\mathcal{Q})) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{non}(\mathcal{P}) \vee \mathcal{Q})$$

□

2 Différents types de raisonnements

2.1 Démonstration d'une équivalence

2.1.1 Par double implication

Théorème 2.1 : *Equivalence par double implication*

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On a $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ lorsque l'on a, à la fois, $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$. On peut écrire :

$$(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}) \wedge (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$$

À nouveau, les tables de vérité peuvent être utilisées pour démontrer ce théorème, mais une autre démonstration peut être proposée ici.

Démonstration. D'après la définition 1.7 de l'équivalence, $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$ signifie que soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont fausses :

$$\begin{array}{rcl}
(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}) & \Leftrightarrow & (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\text{non}(\mathcal{P}) \wedge \text{non}(\mathcal{Q})) \\
\textit{théorème 1.21 sur la distributivité} & \Leftrightarrow & (\mathcal{P} \vee (\text{non}(\mathcal{P}) \wedge \text{non}(\mathcal{Q}))) \wedge (\mathcal{Q} \vee (\text{non}(\mathcal{P}) \wedge \text{non}(\mathcal{Q}))) \\
\textit{théorème 1.21 sur la distributivité} & \Leftrightarrow & (\mathcal{P} \vee \text{non}(\mathcal{P})) \wedge (\mathcal{P} \vee \text{non}(\mathcal{Q})) \wedge (\mathcal{Q} \vee \text{non}(\mathcal{P})) \wedge (\mathcal{Q} \vee \text{non}(\mathcal{Q})) \\
 & \Leftrightarrow & (\mathcal{P} \vee \text{non}(\mathcal{Q})) \wedge (\text{non}(\mathcal{P}) \vee \mathcal{Q}) \\
\textit{propriété 1.26 sur l'implication} & \Leftrightarrow & (\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}) \wedge (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})
\end{array}$$

□

Lorsque l'on a $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, on dit que $\mathcal{P}$ est une **condition nécessaire et suffisante** de $\mathcal{Q}$.

Méthode 2.2 : *Raisonnement par double implication*

Pour démontrer l'équivalence $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, on montre que les deux implications $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ et $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ sont vraies.

Modèle de rédaction

($\Rightarrow$) Supposons $\mathcal{P}$. On a alors ... (*démonstration dépendante de* $\mathcal{P}$) ... et donc $\mathcal{Q}$.
Ce qui démontre $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

($\Leftarrow$) Supposons $\mathcal{Q}$. On a alors ... (*démonstration dépendante de* $\mathcal{Q}$) ... et donc $\mathcal{P}$.
Ce qui démontre $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.

Et ainsi, $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$.

Exemple 17. *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda^n + \mu^n, \text{ avec } \lambda \text{ et } \mu \text{ deux réels tels que } 0 < \lambda \leq \mu.$$

Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \lambda \leq \mu < 1.$

Solution.

2.1.2 Par enchainement d'équivalences

Méthode 2.3 : *Enchainement d'équivalences*

Pour montrer que $\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$, on peut également procéder en une seule étape. On passe alors de $\mathcal{P}$ à $\mathcal{Q}$ en utilisant à chaque fois des équivalences. Cette méthode est plus courte que la précédente (une seule étape au lieu de deux) mais peut aussi être plus fastidieuse puisqu'on doit vérifier que chaque enchaînement logique de la démonstration est bien une équivalence et pas seulement une implication.

Exemple 18. *Montrer que pour* $x \in \mathbb{R}^*$,

$$(E) \quad x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$$

Puis résoudre l'équation (E) *en posant* $X = x + \dfrac{1}{x}$.

Solution.

On peut également montrer qu'une proposition est vraie en montrant qu'elle est équivalente à une proposition dont on sait déjà qu'elle est vraie.

Exemple 19. *Montrer que*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad xy \leq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

Solution.

2.2 Raisonnement par contraposée

Définition 2.4 : *Contraposée d'une implication*

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. L'implication $\text{non}(\mathcal{Q}) \Rightarrow \text{non}(\mathcal{P})$ s'appelle la **contraposée** de $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Exemple 20. *La contraposée de "s'il pleut, alors le sol est mouillé" est "si le sol est sec, alors il ne pleut pas".*

Théorème 2.5 : *Contraposition*

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ deux propositions. On a :

$$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) \quad \Leftrightarrow \quad (\text{non}(\mathcal{Q}) \Rightarrow \text{non}(\mathcal{P}))$$

Démonstration. D'après la propriété 1.26 sur l'implication,

$$\begin{array}{rcl} (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) & \Leftrightarrow & (\text{non}(\mathcal{P}) \vee \mathcal{Q}) \\ \textit{propriété 1.13 de double négation} & \Leftrightarrow & (\text{non}(\text{non}(\mathcal{Q})) \vee \text{non}(\mathcal{P})) \\ \textit{propriété 1.26 sur l'implication} & \Leftrightarrow & (\text{non}(\mathcal{Q}) \Rightarrow \text{non}(\mathcal{P})) \end{array}$$

□

Méthode 2.6 : *Raisonnement par contraposée*

On veut montrer que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$. À l'aide du théorème 2.5, il suffit de montrer la contraposée non$(\mathcal{Q}) \Rightarrow$ non$(\mathcal{P})$. On va donc supposer que non$(\mathcal{Q})$ est vraie pour montrer non$(\mathcal{P})$ est vraie.

Modèle de rédaction

Montrons que $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ par contraposée.
Supposons non$(\mathcal{Q})$. On a alors ... (*démonstration dépendante de non*$(\mathcal{Q})$) ... et donc non$(\mathcal{P})$.
Ce qui démontre $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

Exemple 21. Inégalités dans $\mathbb{R}^2$ [HEC 2017 Voie E]
Montrer que pour $\epsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$,

$$x + y \geq \epsilon \Rightarrow \left(x \geq \frac{\epsilon}{2} \text{ ou } y \geq \frac{\epsilon}{2}\right)$$

Solution.

2.3 Raisonnement par l'absurde

Méthode 2.7 : *Raisonnement par l'absurde*

On veut montrer que la proposition $\mathcal{P}$ est vraie. Pour montrer ceci, on suppose que la proposition $\mathcal{P}$ est fausse et on essaie d'aboutir à une contradiction (c'est équivalent à un raisonnement par double négation : la proposition $\mathcal{P}$ ne peut pas être fausse, donc elle est vraie).

Modèle de rédaction

Montrons que $\mathcal{P}$ est vraie par l'absurde.
Supposons non$(\mathcal{P})$. On a alors ... contradiction !
Ce qui démontre que $\mathcal{P}$ est vraie.

Exemple 22. Irrationalité de $\sqrt{2}$
Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.
Indication : écrivez $\sqrt{2}$ sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ irréductible (avec a et b premiers entre eux).

Solution.

2.4 Raisonnement à l'aide d'un contre-exemple

Méthode 2.8 : *Raisonnement à l'aide d'un contre-exemple*

D'après la propriété 1.14, la négation de "$\forall x \in E$, $\mathcal{P}(x)$" est "$\exists x \in E$, non($\mathcal{P}(x)$)".
Autrement dit, pour montrer que la proposition "$\forall x \in E$, $\mathcal{P}(x)$" est fausse, il suffit de trouver un $x \in E$ tel que $\mathcal{P}(x)$ soit fausse.

Exemple 23. Somme de trois carrés
Montrer que la proposition suivante est fausse "Tout entier positif est somme de trois carrés d'entiers".

Solution.

2.5 Raisonnement par récurrence

2.5.1 Principe de récurrence

Théorème 2.9 : *Principe de récurrence*

Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition définie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si les deux propositions suivantes sont vraies :

- $\mathcal{P}(0)$: c'est l'initialisation de la récurrence,
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: c'est l'hérédité.

Alors, on a la proposition suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n).$$

Méthode 2.10 : *Raisonnement par récurrence*

On utilisera le modèle de rédaction qui suit pour rédiger une récurrence.

Modèle de rédaction

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : "*Énoncez ici la propriété à démontrer*".
Initialisation : *On vérifie la propriété au rang* 0.
Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un entier naturel n fixé. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On vérifie que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie en utilisant $\mathcal{P}(n)$.

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}$,

Énoncez la propriété démontrée.

Remarque 2.11 : *Attention !*

Une erreur classique dans la récurrence est de supposer que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans l'étape d'hérédité : il n'y aurait alors plus rien à prouver. Il faut supposer que pour un n fixé, $\mathcal{P}(n)$ est vraie. On montre alors que $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie.

Exemple 24. Somme de carrés.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solution.

2.5.2 Récurrence à partir d'un certain rang

Théorème 2.12 : *Principe de récurrence*

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On considère $\mathcal{P}(n)$ une proposition définie pour tout $n \geq n_0$. Si les deux propositions suivantes sont vraies :

- $\mathcal{P}(n_0)$: c'est l'initialisation de la récurrence,
- $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: c'est l'hérédité.

Alors, on a la proposition suivante :

$$\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n).$$

Méthode 2.13 : *Raisonnement par récurrence*

On adapte le modèle de rédaction précédent à n'importe quel rang d'initialisation n_0.

Modèle de rédaction

Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : "*Énoncez ici la propriété à démontrer*".
Initialisation : *On vérifie la propriété au rang n_0.*
Ainsi $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un $n \geq n_0$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On vérifie que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie en utilisant $\mathcal{P}(n)$.

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a : pour tout $n \geq n_0$,

Énoncez la propriété démontrée.

Exemple 25. Inégalité pour des entiers assez grands.
Montrer que pour tout $n \geq 4$,

$$2^n \geq n^2.$$

Indication : il faudra montrer que pour $n \geq 4$, $n^2 \geq 2n+1$.

Solution.

2.5.3 Récurrence d'ordre 2

Théorème 2.14 : *Principe de récurrence d'ordre 2*

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On considère $\mathcal{P}(n)$ une proposition définie pour tout $n \geq n_0$. Si les deux propositions suivantes sont vraies :

- $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$: c'est l'initialisation de la récurrence,
- $\forall n \geq n_0, (\mathcal{P}(n) \wedge \mathcal{P}(n+1)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+2)$: c'est l'hérédité.

Alors, on a la proposition suivante :

$$\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n).$$

Méthode 2.15 : *Raisonnement par récurrence d'ordre 2*

Il faut donc vérifier l'initialisation aux rangs n_0 et n_0+1. L'hérédité demande désormais de supposer que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ soient vraies pour démontrer que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

Modèle de rédaction

Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : "*Énoncez ici la propriété à démontrer*".
Initialisation : *On vérifie la propriété aux rangs n_0 et n_0+1.*
Ainsi $\mathcal{P}(n_0)$ et $\mathcal{P}(n_0+1)$ sont vraies.
Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies pour un $n \geq n_0$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

On vérifie que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie en utilisant $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$.

Ainsi $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a : pour tout $n \geq n_0$,

Énoncez la propriété démontrée.

Exemple 26. *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*

$$u_0 = u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n.$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq n$.

Solution.

2.5.4 Récurrence forte

Théorème 2.16 : *Principe de récurrence forte*

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On considère $\mathcal{P}(n)$ une proposition définie pour tout $n \geq n_0$. Si les deux propositions suivantes sont vraies :

- $\mathcal{P}(n_0)$: c'est l'initialisation de la récurrence,
- $\forall n \geq n_0$, $(\mathcal{P}(n_0) \wedge \mathcal{P}(n_0+1), \cdots \wedge \mathcal{P}(n)) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$: c'est l'hérédité.

Alors, on a la proposition suivante :

$$\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n).$$

Méthode 2.17 : *Raisonnement par récurrence forte*

Pour $n \geq n_0$ fixé, l'hérédité demande que la proposition soit vraie pour tous les rangs de n_0 à n pour montrer qu'elle est vraie au rang $n+1$.

Modèle de rédaction

Pour $n \geq n_0$, soit $\mathcal{P}(n)$ la proposition : "*Énoncez ici la propriété à démontrer*".
Initialisation : *On vérifie la propriété au rang n_0.*
Ainsi $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}(n_0)$, $\mathcal{P}(n_0+1)$ $\ldots$ et $\mathcal{P}(n)$ sont vraies pour un $n \geq n_0$ fixé. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On vérifie que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie en utilisant $\mathcal{P}(n_0)$, $\mathcal{P}(n_0+1)$ $\ldots$ et $\mathcal{P}(n)$.

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence, on a : pour tout $n \geq n_0$,

Énoncez la propriété démontrée.

Exemple 27. *On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :*

$$u_1 = \pi \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{2}{n}\left(u_1 + u_2 + \cdots + u_n\right).$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = n\,\pi$.

Solution.

2.6 Raisonnement par analyse-synthèse

Méthode 2.18 : *Raisonnement par analyse-synthèse*

On veut montrer l'existence et l'unicité d'une solution vérifiant des propriétés données. Un raisonnement par analyse-synthèse se déroule en deux étapes :

- Analyse : on raisonne sur une hypothétique solution au problème et on accumule des déductions de propriétés qu'elle doit vérifier, du seul fait qu'elle est solution.
- Synthèse : on examine tous les objets vérifiant les conditions nécessaires précédemment accumulées (ce sont les seuls candidats pouvant être des solutions) et on détermine, parmi eux, lesquels sont réellement des solutions.

Exemple 28. *On résout l'équation suivante en raisonnant par analyse-synthèse.*

$$\sqrt{x+2} = x, \qquad \textit{pour } x \geq -2.$$

- *Analyse : on suppose que cette équation admet une solution x alors en passant au carré, on obtient*

  $$x+2 = x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - x - 2 = 0.$$

  En utilisant un discriminant ou en les calculant directement, on remarque que les solutions de cette équation sont -1 et 2. On a donc que si $\sqrt{x+2} = x$ alors $x = -1$ ou $x = 2$.

- *Synthèse : on a vu que si x est une solution de l'équation $\sqrt{x+2} = x$ alors $x = -1$ ou $x = 2$.*
  - *Si $x = 2$, on a bien*
    $$\sqrt{x+2} = \sqrt{4} = 2 = x,$$
    donc 2 est bien solution.
  - *Si $x = -1$, on a*
    $$\sqrt{x+2} = \sqrt{1} = 1 \neq -1 = x,$$
    donc -1 n'est pas solution.

  Finalement cette équation n'admet qu'une solution qui est $x = 2$.

3 Annexe : alphabet grec

Minuscule	Majuscule	Nom des lettres	Correspondance en alphabet latin
α	A	alpha	a
β	B	bêta	b
γ	Γ	gamma	g
δ	Δ	delta	d
ε	E	epsilon	é
ζ	Z	dzêta	dz
η	H	êta	è
θ	Θ	thêta	th
ι	I	iota	i
κ	K	kappa	k
λ	Λ	lambda	l
μ	M	mu	m
ν	N	nu	n
ξ	Ξ	xi	x
o	O	omicron	o
π	Π	pi	p
ρ	P	rhô	r
σ	Σ	sigma	s
τ	T	tau	t
υ	Υ	upsilon	y
φ	Φ	phi	ph
χ	X	khi	ch
ψ	Ψ	psi	ps
ω	Ω	oméga	ô