Matrices

Table des matières

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1 : *Matrice*

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle **matrice** à n lignes et p colonnes à coefficients réels le tableau de réels suivant :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

On dit que A est une matrice de taille $n \times p$.

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients réels est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemple 1.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & \pi & -7 \\ 2 & 2 & 3/2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R}) \textit{ avec par exemple } a_{1,2} = \pi \textit{ et } a_{2,1} = 2.$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \textit{ avec par exemple } b_{2,1} = -2.$$

Remarque 1.2 : *Vocabulaire*

- Si $p = 1$, on dit que A est une **matrice colonne** (ou **vecteur colonne**).
- Si $n = 1$, on dit que A est une **matrice ligne** (ou **vecteur ligne**).
- Si $n = p$, on dit que A est une **matrice carrée**.

L'ensemble des matrices carrées $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ se note plus simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R}). \quad \textit{A est un vecteur ligne.}$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}). \quad \textit{B est un vecteur colonne.}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}). \quad \textit{C est une matrice carrée de taille } 2.$$

Définition 1.3 : *Matrice nulle*

Dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on appelle **matrice nulle** la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 0.
On la note $0_{n,p}$ (ou 0 s'il n'y a pas d'ambiguïté possible).
La matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se note simplement 0_n.

Définition 1.4 : *Egalité matricielle*

Deux matrices sont égales si elles ont la même taille et les mêmes coefficients.

1.2 Opérations élémentaires sur les matrices

1.2.1 Addition de matrices

Définition 1.5 : *Addition de deux matrices*

Soient deux matrices $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La matrice $A+B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par

$$A+B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & a_{1,2}+b_{1,2} & \dots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & a_{2,2}+b_{2,2} & \dots & a_{2,p}+b_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & a_{n,2}+b_{n,2} & \dots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, si $A+B = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$, alors

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}.$$

On ne peut additionner deux matrices que si elles ont la même taille.

Exemple 3.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

1.2.2 Multiplication d'une matrice par un scalaire

Définition 1.6 : *Multiplication d'une matrice par un scalaire*

Soient une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. La matrice $\lambda\, A$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ définie par

$$\lambda\, A = \lambda \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\, a_{1,1} & \lambda\, a_{1,2} & \dots & \lambda\, a_{1,p} \\ \lambda\, a_{2,1} & \lambda\, a_{2,2} & \dots & \lambda\, a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda\, a_{n,1} & \lambda\, a_{n,2} & \dots & \lambda\, a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, si $\lambda\, A = (d_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$, alors

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad d_{i,j} = \lambda\, a_{i,j}.$$

Exemple 4.

$$3 \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$$

1.2.3 Règles de calcul dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Propriété 1.7 : *Règles de calcul*

Soient A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et λ et μ deux réels.

- (Associativité) $(A+B)+C = A+(B+C)$
  $\lambda\,(\mu\,A) = (\lambda\,\mu)\,A$
- (Commutativité) $A+B = B+A$
- (Distributivité) $(\lambda+\mu)\,A = \lambda\,A + \mu\,A$
  $\lambda\,(A+B) = \lambda\,A + \lambda\,B$
- (Éléments neutres) $A + 0_{n,p} = 0_{n,p} + A = A$
  $1\,A = A$
- (Opposé) $A + (-1)\,A = (-1)\,A + A = 0_{n,p}$

Démonstration. Pour vérifier ces propriétés, il suffit de vérifier les égalités coefficient par coefficient. □

La matrice $(-1)\,A$ se notera $-A$ (opposé de A). L'opération $A+(-B)$ sera notée simplement $A-B$.

Exemple 5. *Calculer*

$$3\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 4\end{pmatrix}.$$

Solution.

1.3 Produit matriciel

Le produit de deux matrices n'est pas une opération élémentaire. Il ne se fait pas terme par terme.

1.3.1 Produit d'une matrice par un vecteur colonne

Définition 1.8 : *Produit d'une matrice par un vecteur colonne*

Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $X = (x_k)_{1\le k\le n}$ un vecteur colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. La matrice $A\,X$ est une matrice de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ et

$$A\,X = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n} a_{1,k}\,x_k\\ \sum_{k=1}^{n} a_{2,k}\,x_k\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{n} a_{m,k}\,x_k\end{pmatrix} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}\,x_k\right)_{1\le i\le m}$$

Exemple 6. *Calculer*

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Solution.

Le produit n'est possible que si le nombre de colonnes de la matrice est égal au nombre de lignes du vecteur.

Exemple 7. *Le produit suivant n'a pas de sens*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

1.3.2 Produit de deux matrices

Définition 1.9 : *Produit de deux matrices*

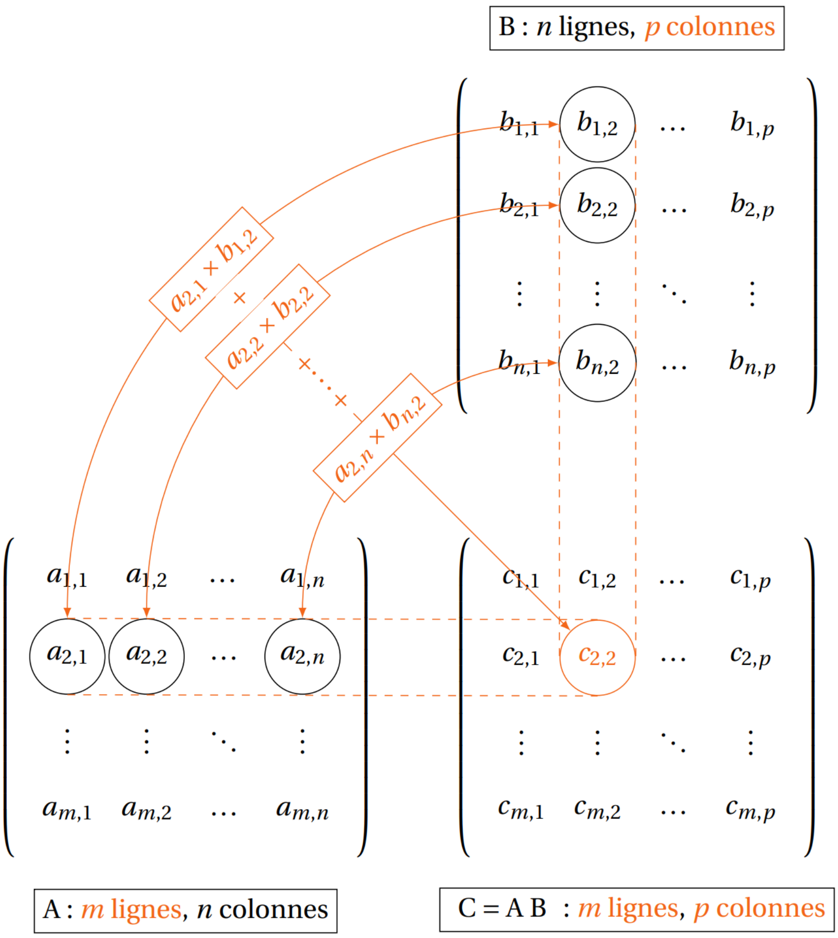
Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. La matrice $A\,B$ est une matrice de $\mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ et si $A\,B = (c_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq p}}$, alors

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!] \times [\![1,p]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}.$$

Cette définition généralise la définition du produit d'une matrice et d'un vecteur colonne : si on note X_1, X_2, …, X_p les colonnes de la matrice B, alors les colonnes de la matrice $A\,B$ seront $A\,X_1$, $A\,X_2$, …, $A\,X_p$.

Méthode 1.10 : *Produit de deux matrices*

Pour multiplier deux matrices à la main, on pose souvent la multiplication comme ci-dessous : la matrice A en bas à gauche, la matrice B en haut à droite et le résultat en bas à droite. On considère ensuite les produits de chaque ligne de A avec une colonne de B.



Exemple 8. *Calculer*

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution.

Pour pouvoir multiplier deux matrices, il est nécessaire que le nombre de colonnes de la matrice de gauche soit égal au nombre de lignes de la matrice de droite. En particulier, il peut arriver que le produit $A\,B$ soit défini et que le produit $B\,A$ n'existe pas.

Exemple 9. *Le produit suivant n'a pas de sens*

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.11 : *Produit matriciel non commutatif*

Le produit matriciel n'est pas commutatif. Si $A\,B$ et $B\,A$ existent, on a généralement : $A\,B \neq B\,A$.

Même si les deux produits existent, ils n'ont pas forcément la même taille.

Exemple 10. *Si* $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$*, alors* $A\,B \in \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ *et* $B\,A \in \mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$*.*

Même s'ils ont la même taille, ils ne sont pas forcément égaux.

Exemple 11.

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Remarque 1.12 : *Produit matriciel non intègre*

Si $A\,B = 0_{m,p}$, alors on n'a pas forcément $A = 0_{m,n}$ ou $B = 0_{n,p}$.

Exemple 12.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propriété 1.13 : *Règles de calcul*

Soient A et A' deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, B et B' deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, C une matrice de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (Associativité) $(A\,B)\,C = A\,(B\,C)$
- (Distributivité) $(A + A')\,B = A\,B + A'\,B$

  $A\,(B + B') = A\,B + A\,B'$
- (Lien entre les multiplications) $\lambda\,(A\,B) = (\lambda\,A)\,B = A\,(\lambda\,B)$

Démonstration. Pour vérifier ces propriétés, il suffit de vérifier les égalités coefficient par coefficient. □

1.4 Transposée d'une matrice

Définition 1.14 : *Transposée d'une matrice*

Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq p}}$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. On appelle **transposée de** A la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ noté ${}^tA$ définie par

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,p} & a_{2,p} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = (a_{j,i})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq n}} $$

Les lignes de A deviennent les colonnes de ${}^tA$ et réciproquement.

Exemple 13. *Si* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, *alors*

$$ {}^tA = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} $$

Propriété 1.15 : *Règles de calcul*

Soient A et A' deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, B une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- (Linéarité) ${}^t(A + A') = {}^tA + {}^tA'$
- (Multiplication par un scalaire) ${}^t(\lambda A) = \lambda\, {}^tA$
- (Produit matriciel) ${}^t(AB) = {}^tB\, {}^tA$
- (Involution) ${}^t({}^tA) = A$

Démonstration. Pour vérifier ces propriétés, il suffit de vérifier les égalités coefficient par coefficient. □

2 Matrices carrées

2.1 Matrices carrées particulières

2.1.1 Matrice diagonale

Définition 2.1 : *Coefficients diagonaux*

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, les scalaires $a_{i,i}$ sont appelés **coefficients diagonaux** de A.

Exemple 14. *Si* $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 6 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$, *ses coefficients diagonaux sont dans l'ordre* 4, -1 *et* 0.

Définition 2.2 : *Matrice diagonale*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une **matrice diagonale** si

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i \neq j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

Autrement dit,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Remarque 2.3 : *Sens de la diagonale*

La diagonale d'une matrice va toujours du haut vers le bas et de la gauche vers la droite.

Exemple 15. $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ *n'est pas une matrice diagonale.*

Définition 2.4 : *Matrice identité*

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle **matrice identité** la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux sont égaux à 1.
On la note I_n (ou I s'il n'y a pas d'ambigüité possible).

Exemple 16.

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On obtient facilement les deux propriétés suivantes.

Propriété 2.5 : *Elément neutre*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$I_n\, A = A\, I_n = A$$

Propriété 2.6 : *Produit de matrices diagonales*

Si A et B sont deux matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A\,B$ est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Exemple 17. *Dans le cas $n = 2$, pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $(a',b') \in \mathbb{R}^2$,*

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & 0 \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\,a' & 0 \\ 0 & b\,b' \end{pmatrix}$$

Définition 2.7 : *Matrice scalaire*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. A est une **matrice scalaire** si $A = \lambda\, I_n$.

Exemple 18. $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ *est une matrice scalaire.*

2.1.2 Matrices triangulaires

Définition 2.8 : *Matrices triangulaires*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice

- **triangulaire inférieure** si

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i < j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

Autrement dit,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- **triangulaire supérieure** si

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0.$$

Autrement dit,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \dots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Exemple 19. *Pour reprendre la remarque 2.3,* $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ *n'est pas une matrice triangulaire.*

Propriété 2.9 : *Produit de matrices triangulaires*

Si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors $A\,B$ est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Démonstration. À démontrer en exercice. □

Exemple 20.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Propriété 2.10 : *Transposée d'une matrice triangulaire*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$A \text{ est triangulaire} \quad \Leftrightarrow \quad {}^tA \text{ est triangulaire.}$$

Démonstration. En effet, si A est triangulaire supérieure alors ${}^tA$ est triangulaire inférieure et inversement. □

Exemple 21. *Si* $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, *alors* ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Remarque 2.11 : *Lien entre matrices diagonales et triangulaires*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$A \text{ est diagonale} \quad \Leftrightarrow \quad A \text{ est triangulaire inférieure et triangulaire supérieure.}$$

2.1.3 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 2.12 : *Matrices symétriques et antisymétriques*

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \le i,j \le n}$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est une matrice

- **symétrique** si ${}^tA = A$.
- **antisymétrique** si ${}^tA = -A$.

On remarque qu'une matrice antisymétrique a des coefficients diagonaux nuls.

Exemple 22. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *est une matrice symétrique et* $\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ *est une matrice antisymétrique.*

Exemple 23. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A\,{}^tA$ et ${}^tA\,A$ sont bien définies et que ces matrices sont symétriques.*

Solution.

Exemple 24. *Soient A et B deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que*

$$A\,B = B\,A \quad \Leftrightarrow \quad A\,B \text{ est symétrique}$$

Solution.

Propriété 2.13 : *Une matrice diagonale est symétrique*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$A \text{ est diagonale} \quad \Rightarrow \quad A \text{ est symétrique.}$$

Démonstration. À démontrer en exercice. □

2.2 Puissance d'une matrice carrée

2.2.1 Généralités

Définition 2.14 : *Puissance d'une matrice carrée*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $A^0 = I_n$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on définit A^p par la relation de récurrence

$$A^p = A^{p-1}\,A.$$

On a $A^p = \underbrace{A\,A\,\ldots\,A}_{p \text{ facteurs}}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Pour élever une matrice à la puissance p, il ne suffit donc pas d'élever chacun de ses coefficients à la puissance p.

Exemple 25. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$. *Calculer* A^2, A^3 *et* A^6.

Solution.

Proposition 2.15 : *Puissance d'une matrice diagonale*

Si D est une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors pour $p \in \mathbb{N}$

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & d_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D^p = \begin{pmatrix} (d_1)^p & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & (d_2)^p & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & (d_n)^p \end{pmatrix}$$

Démonstration. À démontrer par récurrence en exercice. □

Exemple 26. *Soient* $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $p \in \mathbb{N}$. *D'après la proposition,* $D^p = \begin{pmatrix} (-1)^p & 0 \\ 0 & 2^p \end{pmatrix}$.

Propriété 2.16 : *Règles de calcul*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et p, q deux entiers naturels.

- $A^p\,A^q = A^{p+q} = A^q\,A^p$
- $(A^p)^q = A^{pq}$
- ${}^t(A^p) = ({}^tA)^p$

Démonstration. À démontrer par récurrence en exercice. □

Propriété 2.17 : *Puissance d'un produit*

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$.

$$(AB)^p = \underbrace{(AB)\,(AB)\,\ldots\,(AB)}_{p \text{ facteurs } (AB)}$$

Si A et B commutent ($A\,B = B\,A$), alors

$$(AB)^p = A^p\,B^p = B^p\,A^p.$$

De manière générale, si A et B commutent et p, q sont deux entiers naturels, alors

$$A^p\,B^q = B^q\,A^p.$$

Démonstration. À démontrer par récurrence en exercice. □

2.2.2 Binôme de Newton

Théorème 2.18 : *Binôme de Newton*

Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $p \in \mathbb{N}$. Si A et B **commutent** ($A\,B = B\,A$), alors

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k\,B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k}\,B^k.$$

Démonstration. La démonstration suit exactement les mêmes étapes que celles du chapitre Dénombrement. □

La formule est fausse si A et B ne commutent pas.

Exemple 27. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Calculer* $(A+B)^2$ *et* $A^2 + 2A\,B + B^2$.

Solution.

2.2.3 Polynôme d'une matrice carrée

Définition 2.19 : *Polynôme d'une matrice carrée*

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P(X) = \sum_{i=0}^{r} a_i X^i$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. On définit $P(A)$ par

$$P(A) = \sum_{i=0}^{r} a_i A^i \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exemple 28. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $P(X) = X^2 - 3X + 2$.

$$P(A) = A^2 - 3\,A + 2\,I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2.3 Matrices carrées inversibles

Définition 2.20 : *Matrice inversible*

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que A est **inversible** s'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tel que

$$A\,B = B\,A = I_n.$$

La matrice B est appelée **inverse de** A.

Exemple 29. *Vérifier que* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$ *sont inverses l'une de l'autre.*

Solution.

Propriété 2.21 : *Unicité de l'inverse*

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, alors A admet un unique inverse. On note cet inverse A^{-1}.

Démonstration. Si B et C sont deux inverses de A, alors

$$A\,B = B\,A = I_n \quad \text{et} \quad A\,C = C\,A = I_n.$$

Ainsi

$$C\,A\,B = (C\,A)\,B = I_n\,B = B$$

mais également

$$C\,A\,B = C\,(A\,B) = C\,I_n = C.$$

D'où $B = C$. □

Remarque 2.22 : *Erreur à éviter*

Il ne faut pas écrire $\dfrac{1}{A}$ pour écrire l'inverse de A.

Exemple 30. I_n *est inversible et* $I_n^{-1} = I_n$.

Toutes les matrices carrées ne sont pas inversibles.

Exemple 31. 0_n *n'est pas inversible.*

Théorème 2.23 : *Inverse à gauche ou à droite*

Si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors les propositions suivantes sont équivalentes.

(i) $A\,B = I_n$

(ii) $B\,A = I_n$

(iii) $B = A^{-1}$

Pour vérifier que deux matrices sont inverses l'une de l'autre, il suffit donc de calculer l'un des 2 produits $A\,B$ ou $B\,A$.

Démonstration. L'implication de (iii) vers (i) et de (iii) vers (ii) découle de la définition. Les implications réciproques sont admises. □

Propriété 2.24 : *Règles de calcul*

Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{N}$.

- A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- $A\,B$ est inversible et $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$.
- $\lambda\,A$ est inversible et $(\lambda\,A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$.
- A^p est inversible et $(A^p)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^p$ que l'on note A^{-p}.
- ${}^tA$ est inversible et $\left({}^tA\right)^{-1} = {}^t\left(A^{-1}\right)$

Démonstration. Il suffit de vérifier que les inverses des propositions vérifient la définition de l'inverse. □

En général, si A et B sont inversibles alors $A+B$ n'est pas forcément inversible.

Exemple 32. *Si A est inversible, alors $-A$ est inversible mais $A+(-A) = 0_n$ n'est pas inversible.*

Proposition 2.25 : *Inversibilité d'une matrice triangulaire*

Soit A une matrice triangulaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Tous les coefficients diagonaux de } A \text{ sont non nuls.}$$

Démonstration. La démonstration sera faite dans le chapitre Systèmes linéaires. □

Corollaire 2.26 : *Inversibilité d'une matrice diagonale*

Soit D une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

$$D \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad \text{Tous les coefficients diagonaux de } D \text{ sont non nuls.}$$

De plus, si D est inversible alors

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1/d_n \end{pmatrix}$$

Théorème 2.27 : *Inverse d'une matrice carrée de taille 2*

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors

$$A \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad ad - bc \neq 0$$

Dans ce cas,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad \text{(formule de Cramer)}$$

Démonstration. On pose

$$B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

On raisonne par double implication.
$\Leftarrow$ On suppose que $ad - bc \neq 0$. On remarque que A est inversible et son inverse est

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} B.$$

$\Rightarrow$ Réciproquement, on procède par contraposition. On suppose que $ad - bc = 0$. Montrons que A n'est pas inversible. On a déjà

$$A\,B = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & -bc+ad \end{pmatrix} = 0_2.$$

On raisonne par l'absurde : on suppose que A est inversible. Dès lors,

$$A^{-1}\,A\,B = A^{-1}\,0_2 = 0_2 \quad \text{mais également} \quad A^{-1}\,A\,B = I_2\,B = B$$

D'où $B = 0_2$. Par identification, cela donne que chacun des coefficients de A est nul et donc A est la matrice nulle et n'est donc pas inversible, ce qui est absurde. $\square$

Exemple 33. *Montrer que* $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ *est inversible et déterminer son inverse.*

Solution.