

Polynômes

Table des matières

1	Généralités	2
1.1	Définitions	2
1.2	Degré d'un polynôme	3
1.3	Dérivation de polynômes	4
2	Arithmétique de $\mathbb{R}[X]$	5
2.1	Division euclidienne de polynômes	5
2.2	Méthodes	6
2.3	Polynômes irréductibles	7
3	Racines d'un polynôme	7
3.1	Définition	7
3.2	Ordre de multiplicité d'une racine	8
3.3	Nombre de racines	10
4	Factorisation de polynômes	10
4.1	Cas des polynômes de degré 2	10
4.2	Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$	11

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1.1 : Polynôme

Soit $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que P est une **fonction polynomiale** ou simplement **polynôme** à coefficients dans $\mathbb{R}$ s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels tels que

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = \sum_{k=0}^n a_k x^k.$$

$a_0, a_1, \dots, a_n$ sont appelés **coefficients de P** .

Un polynôme est une fonction ! Ainsi, $P(x)$ n'est pas une fonction mais un réel, tandis que $P : x \mapsto P(x)$ est une fonction. Cependant l'écriture $x \mapsto P(x)$ peut s'avérer ultérieurement difficile à utiliser : c'est pourquoi on introduit la notation X .

Définition 1.2 : Indéterminée

On utilise la notation suivante

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

et pour $p \in \mathbb{N}$, on note

$$\begin{aligned} X^p : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^p \end{aligned}$$

Le polynôme P peut alors s'écrire

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n = \sum_{k=0}^n a_k X^k.$$

Pour éviter toute confusion, on écrit parfois $P(X)$ au lieu de P .

Exemple 1. Plutôt que d'écrire $P : x \mapsto x^3 - 2x + 1$, on peut écrire $P = X^3 - 2X + 1$.

Définition 1.3 : Ensemble des polynômes

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est noté $\mathbb{R}[X]$, lu " $\mathbb{R}$ crochet X ".

La notation $\mathbb{R}[x]$ sera cependant privilégiée dans les sujets de concours.

Proposition 1.4 : Unicité des coefficients d'un polynôme

Deux polynômes sont égaux si, et seulement si leurs coefficients sont égaux.

Démonstration. Admis. □

Exemple 2. Montrer que les polynômes $P = (X^2 + \sqrt{2}X + 1)(X^2 - \sqrt{2}X + 1)$ et $Q = X^4 + 1$ sont égaux.

Solution.

Remarque 1.5 : Vocabulaire

- Le polynôme nul est le polynôme P dont tous les coefficients sont nuls. On le note $P = 0$.
- Un polynôme constant est un polynôme P tel que $P = a_0$ avec $a_0 \in \mathbb{R}$.
- Un monôme (respectivement binôme, trinôme) est un polynôme ayant exactement un (respectivement deux, trois) coefficients non nuls.

Exemple 3. $2X$ et $-X^2$ sont des monômes, $3X^4 - X^2$ est un binôme et $X^2 + 2X + 1$ est un trinôme.

Propriété 1.6 : Opérations usuelles

Si $P \in \mathbb{R}[X]$, $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λP , $P + Q$, PQ sont encore des polynômes.

Démonstration. Il suffit d'appliquer les règles de calcul sur les sommes et les produits, puis de regrouper les termes par puissance de X . $\square$

Exemple 4. Si $P = X^2 + X$ et $Q = 3X + 6$, alors

$$3P - Q = 3(X^2 + X) - (3X + 6) = 3X^2 - 6,$$

$$PQ = (X^2 + X)(3X + 6) = 3X^3 + 9X^2 + 6X.$$

$3P - Q$ et PQ sont des polynômes.

1.2 Degré d'un polynôme**Définition 1.7 : Degré d'un polynôme**

Soit P un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X]$. Il existe $a_0, a_1, \dots, a_n$ des éléments de $\mathbb{R}$ avec $a_n \neq 0$ tels que

$$P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n.$$

L'entier n est appelé **degré de P** (noté $\deg(P)$) et a_n est appelé **coefficient dominant de P** .

Par convention, le polynôme nul a un degré égal à $-\infty$.

Définition 1.8 : Polynôme unitaire

Si le coefficient dominant de P est égal à 1, on dit que P est un **polynôme unitaire**.

Exemple 5. $2X^3$ est un monôme de degré 3 et $X^5 + 2X$ est un binôme unitaire de degré 5.

Définition 1.9 : Ensemble des polynômes de degré inférieur à n

L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{R}_n[X]$.

Propriété 1.10 : Opérations usuelles et degré

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

- (i) $\deg(\lambda P) = \deg(P)$,
- (ii) $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$ si $\deg(P) \neq \deg(Q)$,
- (iii) $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$,
- (iv) $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Démonstration. Si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^m b_k X^k$ avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$, alors

(i) On a $\lambda P = \sum_{k=0}^n \lambda a_k X^k$, et comme $\lambda a_n \neq 0$ alors $\deg(\lambda P) = \deg(P)$.

(ii) Si $\deg(P) > \deg(Q)$, alors

$$P + Q = \sum_{k=0}^m (a_k + b_k) X^k + \sum_{k=m+1}^n a_k X^k.$$

Ainsi $\deg(P + Q) = \deg(P)$.

Le raisonnement pour $\deg(P) < \deg(Q)$ est similaire, et on obtient alors $\deg(P + Q) = \deg(Q)$.

On peut donc conclure que $\deg(P + Q) = \max(\deg(P), \deg(Q))$.

(iii) Le cas $\deg(P) = \deg(Q)$ a été traité. Si $\deg(P) = n = \deg(Q)$, alors

$$P + Q = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) X^k.$$

Or, $a_n + b_n$ peut être égal à 0. $P + Q$ serait alors de degré strictement inférieur à n .

On a bien $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q))$.

(iv) Le monôme de plus haut degré de PQ est $a_n b_m X^{n+m}$ avec $a_n b_m \neq 0$.

Donc $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

□

Corollaire 1.11 : Intégrité

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $Q \in \mathbb{R}[X]$.

$$PQ = 0 \Leftrightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0.$$

Démonstration. À démontrer en exercice à l'aide de la propriété précédente.

□

1.3 Dérivation de polynômes**Définition 1.12 : Polynôme dérivé**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ noté $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $\deg(P) \geq 1$. On appelle **polynôme dérivé** de P le polynôme P' défini par

$$P' = \sum_{k=1}^n k a_k X^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} X^j.$$

Si P est un polynôme constant, alors on définit $P' = 0$.

Exemple 6. Si $P = 3X^5 + 4X^2 + X + 7$ alors $P' = 15X^4 + 8X + 1$.

Propriété 1.13 : Opérations usuelles et dérivée

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $Q \in \mathbb{R}[X]$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

- (i) $(\lambda P)' = \lambda P'$,
- (ii) $(P + Q)' = P' + Q'$,
- (iii) $(PQ)' = P'Q + PQ'$.
- (iv) $(P^n)' = nP'P^{n-1}$.

Démonstration. Ces démonstrations seront faites dans le chapitre Dérivation. □

Exemple 7. Soit $P = (X^3 + 1)^4$. Déterminer P' .

Solution.

Définition 1.14 : Polynôme dérivé d'ordre supérieur

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $k \in \mathbb{N}$. On appelle **polynôme dérivé d'ordre k** du polynôme P le polynôme noté $P^{(k)}$ défini par récurrence de la manière suivante :

$$P^{(0)} = P \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad P^{(k+1)} = (P^{(k)})'.$$

2 Arithmétique de $\mathbb{R}[X]$

2.1 Division euclidienne de polynômes

Définition 2.1 : Diviseur, multiple

On dit que le polynôme B **divise** le polynôme A ou que B est un **diviseur** de A ou que A est un **multiple** de B s'il existe un polynôme C tel que

$$A = BC.$$

Le polynôme C est alors appelé le **quotient** de A par B .

Exemple 8. Le polynôme $X - 1$ divise le polynôme $X^3 - 1$ car $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$.

Exemple 9. Le polynôme $X^2 + 1$ divise le polynôme $X^4 - 1$ car $X^4 - 1 = (X^2 + 1)(X^2 - 1)$.

Théorème 2.2 : Division euclidienne

Soient $A \in \mathbb{R}[X]$ et $B \in \mathbb{R}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tel que :

$$A = BQ + R \quad \text{avec} \quad \deg(R) < \deg(B).$$

Q est appelé le **quotient** de la division euclidienne de A par B et R le **reste** de la division euclidienne de A par B .

Démonstration. Admis. La démonstration peut être obtenue par récurrence sur $\deg(A)$. □

Si $\deg(A) > \deg(B)$, alors

$$\deg(Q) = \deg(A) - \deg(B).$$

2.2 Méthodes

Méthode 2.3 : Par identification des coefficients

Deux polynômes de même degré sont égaux s'ils ont les mêmes coefficients : on cherche donc directement les coefficients.

Exemple 10. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^3 + X^2 - 1$ par $X - 1$. Le quotient est de degré 2 et le reste est constant. On peut donc poser

$$X^3 + X^2 - 1 = (X - 1)(aX^2 + bX + c) + d.$$

Déterminons a , b , c et d . On développe

$$X^3 + X^2 - 1 = aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X + d - c.$$

Par identification des monômes de même degré, on obtient

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 1 \\ c - b = 0 \\ d - c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \\ d = 1 \end{cases}$$

Le quotient est donc $X^2 + 2X + 2$ et le reste est 1 :

$$X^3 + X^2 - 1 = (X - 1)(X^2 + 2X + 2) + 1.$$

Méthode 2.4 : Poser la division euclidienne

On remarquera la similitude de cette méthode avec celle de la division euclidienne sur des entiers. Le plus simple est de suivre l'exemple ci-dessous.

Voici le détail du début : "en A , combien de 'fois' B ?" ou encore "en X^3 , combien de 'fois' X ?". Il y va X^2 fois. Puis on développe $X^2(X - 1)$. Le résultat est placé sous le dividende auquel on le retranche. La division s'arrête lorsque le reste est de degré inférieur strictement à celui du diviseur.

Exemple 11. Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^3 + X^2 - 1$ par $X - 1$.

$$\begin{array}{r|rr} X^3 & +X^2 & & -1 \\ - (X^3 & -X^2) & & \\ \hline & 2X^2 & & \\ & - (2X^2 & -2X) & \\ \hline & & 2X & \\ & & - (2X & -2) \\ \hline & & & 1 \end{array}$$

Exemple 12. Effectuer la division euclidienne de $9X^4 + 6X^3 - 2X + 6$ par $-3X^2 + 7$.

Solution.

2.3 Polynômes irréductibles

Définition 2.5 : Polynôme irréductible

On dit que le polynôme P est **irréductible** lorsqu'il est non constant et que ses seuls diviseurs non constants sont les polynômes de la forme $\lambda P(X)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

La notion de polynôme irréductible pour l'arithmétique de $\mathbb{R}[X]$ correspond à la notion de nombre premier pour l'arithmétique de $\mathbb{Z}$.

Proposition 2.6 : Caractérisation des polynômes irréductibles

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant.

$$P \text{ est irréductible} \quad \Leftrightarrow \quad \text{les diviseurs de } P \text{ sont tous de degré 0 ou } \deg(P).$$

Exemple 13. On peut montrer qu'il n'existe pas de polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 1 divisant $X^2 + 1$. En effet, en raisonnant par l'absurde, si $X - \alpha$ divise $X^2 + 1$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$X^2 + 1 = (X - \alpha)(X - \beta) = X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta.$$

Par identification des monômes de même degré, α et β sont des réels opposés et leur produit vaut 1. On aboutit à une contradiction. $X^2 + 1$ est donc irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

3 Racines d'un polynôme

3.1 Définition

Définition 3.1 : Racine d'un polynôme

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On dit que $\alpha \in \mathbb{R}$ est **racine** de P lorsque $P(\alpha) = 0$.

Théorème 3.2 : Caractérisation de la racine

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$X - \alpha \text{ est un diviseur de } P \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \text{ est racine de } P.$$

Démonstration. $\Rightarrow$ On suppose que $X - \alpha$ est un diviseur de P , alors il existe Q tel que

$$P = (X - \alpha)Q.$$

On a donc

$$P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) = 0.$$

$\Leftarrow$ On raisonne par contraposée : on suppose que $X - \alpha$ n'est pas un diviseur de P . D'après la division euclidienne de P par $X - \alpha$, il existe (Q, R) un couple de polynômes tel que

$$P = (X - \alpha)Q + R \quad \text{avec } \deg(R) < \deg(X - \alpha) = 1.$$

Comme $X - \alpha$ ne divise pas P , $R \neq 0$, donc R est un polynôme constant, non nul. Il s'en suit que

$$P(\alpha) = (\alpha - \alpha)Q(\alpha) + R(\alpha) = R(\alpha) \neq 0.$$

Ainsi α n'est pas racine de P .

Par conséquent, si α est racine de P , alors $X - \alpha$ est un diviseur de P . □

3.2 Ordre de multiplicité d'une racine

Définition 3.3 : Ordre de multiplicité d'une racine

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. L'ordre de multiplicité d'une racine α de P est l'entier m tel que $(X - \alpha)^m$ divise P mais $(X - \alpha)^{m+1}$ ne divise pas P .

Autrement dit, α est d'ordre de multiplicité m si on peut factoriser P par $(X - \alpha)^m$ mais pas par $(X - \alpha)^{m+1}$.

Remarque 3.4 : Vocabulaire

- Si $m = 1$, on dit que α est **racine simple** de P .
- Si $m = 2$, on dit que α est **racine double** de P .
- Si $m \geq 2$, on dit que α est **racine multiple** de P .

Corollaire 3.5 : Ordre de multiplicité d'une racine

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$.

$$\alpha \text{ est d'ordre de multiplicité } m \quad \Leftrightarrow \quad \exists Q \in \mathbb{R}[X] \text{ tel que } P = (X - \alpha)^m Q \text{ et } Q(\alpha) \neq 0.$$

Démonstration. On obtient facilement le résultat en supposant par l'absurde que $Q(\alpha) = 0$, puis en utilisant le théorème précédent. $\square$

Exemple 14. Soit $P = 2X^4 - 4X^3 + 4X - 2$. Trouver l'ordre de multiplicité de la racine 1.

Solution.

Proposition 3.6 : Égalité de Taylor pour les polynômes

Soient $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (x - \alpha)^k.$$

Démonstration. On verra dans le chapitre Développements limités la formule suivante appelée formule de Taylor avec reste intégral : pour $x \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (x - \alpha)^k + \int_{\alpha}^x \frac{(x-t)^n}{n!} P^{(n+1)}(t) dt.$$

Comme $P^{(n+1)} = 0$, on obtient le résultat recherché. $\square$

Corollaire 3.7 : Ordre de multiplicité et dérivée

Soient $P \in \mathbb{R}[X]$, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{N}$.

$$\alpha \text{ est d'ordre de multiplicité } m \quad \Leftrightarrow \quad \forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, P^{(k)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Démonstration. ($\Rightarrow$) Si α est d'ordre de multiplicité m , alors $\exists Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^m Q$ et $Q(\alpha) \neq 0$. D'après la formule de Leibniz (voir chapitre Développements limités), on observe alors que

$$\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, P^{(k)}(X) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} ((X - \alpha)^m)^{(i)}(X) Q^{(k-i)}(X) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{m!}{(m-i)!} (X - \alpha)^{m-i} Q^{(k-i)}(X)$$

Comme $k \leq m-1$, alors $\forall i \in \llbracket 0, k \rrbracket$, $(\alpha - \alpha)^{m-i} = 0$ car $m-i > 0$, alors

$$\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, P^{(k)}(\alpha) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \frac{m!}{(m-i)!} (\alpha - \alpha)^{m-i} Q^{(k-i)}(\alpha) = 0.$$

D'autre part,

$$P^{(m)}(X) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{m!}{(m-i)!} (X - \alpha)^{m-i} Q^{(m-i)}(X).$$

Comme $\forall i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, $(\alpha - \alpha)^{m-i} = 0$ et que $(\alpha - \alpha)^{m-m} = 1$, alors

$$P^{(m)}(\alpha) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \frac{m!}{(m-i)!} (\alpha - \alpha)^{m-i} Q^{(m-i)}(\alpha) = m! Q(\alpha) \neq 0.$$

($\Leftarrow$) On suppose que

$$\forall k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket, P^{(k)}(\alpha) = 0 \text{ et } P^{(m)}(\alpha) \neq 0.$$

Si $n = \deg(P)$, alors d'après la proposition 3.6, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (x - \alpha)^k.$$

Soit $m \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (x - \alpha)^k + \sum_{k=m}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (x - \alpha)^k \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (x - \alpha)^k + (x - \alpha)^m \sum_{i=0}^{n-m} \frac{P^{(m+i)}(\alpha)}{(m+i)!} (x - \alpha)^i \text{ avec le changement d'indice } i = k - m. \end{aligned}$$

On a obtenu la division euclidienne de P par $(x - \alpha)^m$. On pose alors

$$R(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (x - \alpha)^k \quad \text{et} \quad Q(x) = \sum_{i=0}^{n-m} \frac{P^{(m+i)}(\alpha)}{(m+i)!} (x - \alpha)^i.$$

On a alors

$$P(x) = R(x) + (x - \alpha)^m Q(x).$$

Par hypothèse, $R = 0$. Or, la racine α est de multiplicité m si et seulement si $R = 0$ et $Q(\alpha) \neq 0$. Ce qui est vrai car

$$Q(\alpha) = \frac{P^{(m)}(\alpha)}{m!} \neq 0.$$

□

Exemple 15. Montrer que $P = 1 + X + X^5$ n'a que des racines simples.

Solution.

3.3 Nombre de racines

Proposition 3.8 : *Nombre de racines d'un polynôme*

Si $P \in \mathbb{R}[X]$ est de degré n , alors la somme des ordres de multiplicité des racines de P est inférieure ou égale à n .

Démonstration. Le résultat peut se montrer aisément par récurrence forte sur n . □

Si $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s \in \mathbb{R}$ sont des racines de P deux à deux distinctes et $m_1, m_2, \dots, m_s$ leurs ordres de multiplicité respectives alors

$$m_1 + m_2 + \dots + m_s \leq n.$$

Corollaire 3.9 : *Nombre maximal de racines d'un polynôme*

Tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines.

Un polynôme de degré inférieur ou égal à n possédant au moins $n + 1$ racines est le polynôme nul. En particulier, tout polynôme qui admet une infinité de racines est nul.

4 Factorisation de polynômes

4.1 Cas des polynômes de degré 2

Théorème 4.1 : *Racine d'un polynôme de degré 2*

Soit P un polynôme de degré 2 défini par $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de P .

- Si $\Delta = 0$, alors P a une seule racine $x_0 = -\frac{b}{2a}$:

$$P = a(X - x_0)^2.$$

- Si $\Delta > 0$, alors P a deux racines $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$:

$$P = a(X - x_1)(X - x_2).$$

- Si $\Delta < 0$, alors P n'a aucune racine réelle et on ne peut pas écrire P sous une forme plus simple.

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} P = aX^2 + bX + c &= a\left(X^2 + \frac{b}{a}X\right) + c = a\left(\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c \\ &= a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \\ &= a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \end{aligned}$$

- Si $\Delta = 0$, alors $P = a(X - x_0)^2$ avec $x_0 = -\frac{b}{2a}$.
- Si $\Delta > 0$, alors $P = a\left(\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) = a(X - x_1)(X - x_2)$ avec $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

- Si $\Delta < 0$, alors on ne peut pas écrire P sous une forme plus simple.

□

Proposition 4.2 : *Caractérisation des polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$*

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de la forme

- $\lambda(X - \alpha)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et $\alpha \in \mathbb{R}$,
- $aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$ et $\Delta = b^2 - 4ac < 0$.

Démonstration. Il suffit de montrer que les polynômes à coefficients réels de degré 2 n'ayant pas de racine réelle n'ont pas de diviseur de degré 1. Raisonnons par l'absurde. Si $a(X - \alpha)$ divise $aX^2 + bX + c$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$, alors il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$aX^2 + bX + c = a(X - \alpha)(X - \beta) = aX^2 - a(\alpha + \beta)X + a\alpha\beta.$$

Par identification des coefficients, on a $b = -a(\alpha + \beta)$ et $c = a\alpha\beta$. Calculons le discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = a^2(\alpha + \beta)^2 - 4a^2\alpha\beta = a^2(\alpha^2 - 4\alpha\beta + \beta^2) = a^2(\alpha - \beta)^2 \geq 0.$$

On obtient une contradiction avec $\Delta < 0$. Ainsi un polynôme de degré 2 n'ayant pas de racine réelle est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$. □

4.2 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème 4.3 : *Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$*

Tout polynôme non constant $P \in \mathbb{R}[X]$ s'écrit comme un produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont donc les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 n'ayant pas de racine réelle.

Démonstration. Admis. □

Exemple 16. $X^4 - 1 = (X - 1)(X + 1)(X^2 + 1)$.

Exemple 17. Factoriser le polynôme suivant dans $\mathbb{R}[X]$:

$$P = X^3 - 2X^2 + 1.$$

Solution.

Proposition 4.4 : *Racine réelle d'un polynôme de degré impair (hors programme)*

Tout polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré impair possède au moins une racine réelle.

Démonstration. Les limites en $-\infty$ et $+\infty$ d'une fonction polynomiale de degré impair sont infinies et de signe différent. Comme une fonction polynomiale est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, le polynôme possède au moins une racine réelle. □

Exemple 18. $X^3 - 1 = (X - 1)(X^2 + X + 1)$.