Suites réelles

Table des matières

1 Vocabulaire sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels

1.1 Encadrement

Définition 1.1 : *Minorant*

Soient E une partie non vide de $\mathbb{R}$ et m un réel. On dit que m est un **minorant** de E lorsque

$$\forall x \in E, \quad m \leq x.$$

Si E a un minorant, alors on dit que E est **minorée**.

Définition 1.2 : *Majorant*

Soient E une partie non vide de $\mathbb{R}$ et M un réel. On dit que M est un **majorant** de E lorsque

$$\forall x \in E, \quad x \leq M.$$

Si E a un majorant, alors on dit que E est **majorée**.

Exemple 1. *L'ensemble $\mathbb{Z}$ n'est ni majoré ni minoré, et l'ensemble $\mathbb{N}$ est non majoré mais minoré par 0.*

Définition 1.3 : *Partie bornée*

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. On dit que E est **bornée** si elle est minorée et majorée.

Exemple 2. *L'intervalle $[0,1[$ est minorée par 0 (et par n'importe quel réel négatif) et majorée par 1 (et par n'importe quel réel plus grand que 1), c'est donc une partie bornée de $\mathbb{R}$.*

Théorème 1.4 : *Théorème de la borne inférieure (resp. supérieure)*

Toute partie non vide minorée (resp. majorée) de $\mathbb{R}$ possède un unique plus grand minorant (resp. plus petit majorant).

Démonstration. Admis. □

Définition 1.5 : *Borne inférieure*

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si E est minorée, on appelle **borne inférieure** de E son plus grand minorant. On note $\inf(E)$, lu "inf de E", cette borne inférieure.
Si E n'est pas minorée, on pose $\inf(E) = -\infty$.

Définition 1.6 : *Borne supérieure*

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si E est majorée, on appelle **borne supérieure** de E son plus petit majorant. On note $\sup(E)$, lu "sup de E", cette borne supérieure.
Si E n'est pas majorée, on pose $\sup(E) = +\infty$.

Exemple 3. *Soit $E = [0,1[$. On a $\inf(E) = 0$ et $\sup(E) = 1$.*

Définition 1.7 : *Minimum*

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si E est minorée et que $\inf(E) \in E$, alors on appelle **minimum** de E la borne inférieure de E. On note alors $\min(E)$ ce minimum.

Définition 1.8 : *Maximum*

Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si E est majorée et que $\sup(E) \in E$, alors on appelle **maximum** de E la borne supérieure de E. On note alors $\max(E)$ ce maximum.

Exemple 4. *Soit $E = [0, 1[$. On a $\min(E) = 0$ mais E n'admet pas de maximum.*

Exemple 5. *Soit $E = \{(-1)^n + \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*\}$. Alors :*

$$\sup(E) = \frac{3}{2} = \max(E) \quad \textit{et} \quad \inf(E) = -1.$$

E n'admet pas de minimum.

1.2 Valeur absolue

Définition 1.9 : *Valeur absolue*

On définit l'application **valeur absolue** de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ par :

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{abs} : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & |x| = \max(x, -x) \end{array}$$

Propriété 1.10 : *Valeur absolue*

Soient x et y deux réels et $\varepsilon > 0$. On a les propositions suivantes :

(i) $-|x| \leq x \leq |x|$,

(ii) $|x| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$,

(iii) $|-x| = |x|$,

(iv) $|xy| = |x|\,|y|$,

(v) $||x| - |y|| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$ (inégalité triangulaire).

Démonstration. À faire en exercice. □

On peut noter que $|x - y|$ représente la distance entre les réels x et y. Pour $\varepsilon > 0$, la distance entre x et y est plus petite que ε si, et seulement si $x \in [y - \varepsilon, y + \varepsilon]$:

$$|x - y| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon \leq x - y \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad y - \varepsilon \leq x \leq y + \varepsilon.$$

Exemple 6. *Soit x un réel tel que $\forall \varepsilon > 0$, $|x| < \varepsilon$. Montrer que $x = 0$.*

Solution.

1.3 Partie entière

La propriété suivante découle de la construction de $\mathbb{R}$, elle est donc admise :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists! n \in \mathbb{Z}, \quad n \leq x < n+1.$$

Définition 1.11 : *Partie entière*

Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **partie entière** de x et on note $\lfloor x \rfloor$ l'unique entier tel que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

2 Généralités sur les suites

Dans cette section, $I = \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\} = [\![n_0, +\infty [\![$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$. Généralement, $I = \mathbb{N}$ ou $I = \mathbb{N}^*$.

2.1 Définitions

Définition 2.1 : *Suite réelle*

On appelle **suite réelle** toute application u de I dans $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} u : I &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

Pour une suite, on note généralement u_n pour $u(n)$. On note cette suite $(u_n)_{n \in I}$.

L'ensemble des suites réelles indexées sur I se note $\mathcal{A}(I, \mathbb{R})$.

2.2 Opérations sur les suites

Propriété 2.2 : *Somme*

Soient $(u_n)_{n \in I}$ et $(v_n)_{n \in I}$ deux suites réelles. On définit leur **somme** $(u_n + v_n)_{n \in I}$ comme étant la suite $(w_n)_{n \in I}$ telle que

$$\forall n \in I, \quad w_n = u_n + v_n.$$

Propriété 2.3 : *Produit*

Soient $(u_n)_{n \in I}$ et $(v_n)_{n \in I}$ deux suites réelles. On définit leur **produit** $(u_n \times v_n)_{n \in I}$ comme étant la suite $(w_n)_{n \in I}$ telle que

$$\forall n \in I, \quad w_n = u_n \times v_n.$$

Propriété 2.4 : *Multiplication par un scalaire*

Soient $(u_n)_{n \in I}$ une suite réelle et λ un réel. On définit la **multiplication** de u par le **scalaire** λ comme étant la suite $(w_n)_{n \in I}$ telle que

$$\forall n \in I, \quad w_n = \lambda u_n.$$

2.3 Propriétés des suites

Définition 2.5 : *Suite minorée, majorée*

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite réelle. On a les définitions suivantes :

$$(u_n)_{n\in I} \text{ est } \textbf{minorée} \quad \Leftrightarrow \quad \exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in I, m \leq u_n.$$

$$(u_n)_{n\in I} \text{ est } \textbf{majorée} \quad \Leftrightarrow \quad \exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in I, u_n \leq M.$$

Quand on dit qu'une suite est positive (resp. négative), cela signifie qu'elle est minorée (resp. majorée) par 0.

Définition 2.6 : *Suite minorée, majorée, bornée*

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite réelle. On dit que $(u_n)_{n\in I}$ est **bornée** si et seulement si $(u_n)_{n\in I}$ est majorée et minorée. Autrement dit,

$$(u_n)_{n\in I} \text{ est } \textbf{bornée} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (m, M) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in I, \quad m \leq u_n \leq M \quad \Leftrightarrow \quad \exists K \in \mathbb{R}_+, \forall n \in I, \quad |u_n| \leq K.$$

Définition 2.7 : *Suite croissante, décroissante, monotone*

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite réelle. On a les définitions suivantes :

$$(u_n)_{n\in I} \text{ est } \textbf{croissante} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in I, \quad u_n \leq u_{n+1}.$$

$$(u_n)_{n\in I} \text{ est } \textbf{décroissante} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in I, \quad u_n \geq u_{n+1}.$$

On dit qu'une suite est **monotone** lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

$$(u_n)_{n\in I} \text{ est } \textbf{strictement croissante} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in I, \quad u_n < u_{n+1}.$$

$$(u_n)_{n\in I} \text{ est } \textbf{strictement décroissante} \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in I, \quad u_n > u_{n+1}.$$

On dit qu'une suite est **strictement monotone** lorsqu'elle est soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

Une suite croissante (resp. décroissante, constante) à partir d'un certain rang n'est pas forcément croissante (resp. décroissante, constante) sur I.

Exemple 7. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit : $u_n = (n-4)^2$. (u_n) est décroissante sur $[\![0, 4]\!]$ et croissante à partir du rang 4.*

Définition 2.8 : *Suite constante*

Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite réelle. On dit que u est **constante** si :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in I, \quad u_n = \lambda.$$

Informatique 2.9 : *Python : calculer les premiers termes d'une suite définie par récurrence*

L'outil informatique est précieux pour calculer des approximations des termes successifs d'une suite définie par récurrence lorsqu'on ne trouve pas une formule générale explicite.
On considère une suite définie par récurrence par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

En supposant que f est définie au préalable, le programme suivant demande à l'utilisateur les valeurs de u_0 et de n puis calcule la valeur de u_n.

```
import numpy as np
u=eval(input('u0=?'))
n=eval(input('n=?'))
for k in range(1,n+1) :
   u=f(u)
print(u)
```

Informatique 2.10 : *Python : représenter les premiers termes d'une suite définie par récurrence*

L'outil informatique permet aussi de représenter graphiquement l'évolution d'une suite et de conjecturer éventuellement sa nature et la valeur de sa limite (si elle existe).
On rajoute au programme précédent l'utilisation de la liste L qui va stocker l'ensemble des termes de la suite.

```
import numpy as np
u=eval(input('u0=?'))
n=eval(input('n=?'))
L=np.zeros(n+1)
L[0]=u
for k in range(1,n+1) :
   u=f(u)
   L[k]=u
```

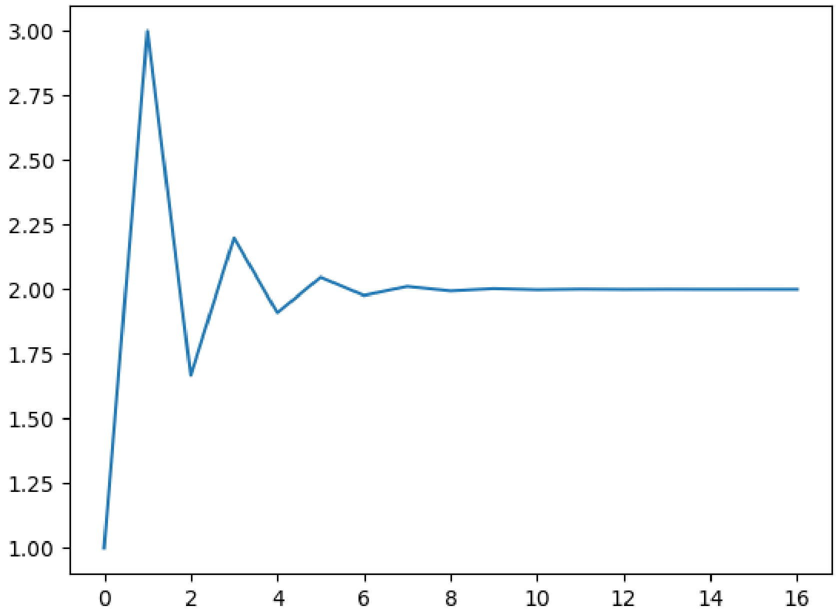
Si on veut ensuite représenter graphiquement les termes en question, on ajoute :

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.plot(range(0,n+1),L)
plt.show()
```

Exemple 8. *On peut représenter les* 16 *premières valeurs de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tel que* $u_0 = 1$ *et pour* $n \in \mathbb{N}$

$$u_{n+1} = 1 + \frac{2}{u_n}.$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
u=1
n=16
L=np.zeros(n+1)
L[0]=u
for k in range(1,n+1) :
   u=1+2/u
   L[k]=u
plt.plot(range(0,n+1),L)
plt.show()
```



Ici, la suite semble converger vers 2. *La dernière valeur de* u *calculée par le programme constitue une approximation de cette limite (il faut que* n *soit suffisamment grand). On peut rajouter la commande* `print(u)` *en fin de programme. On obtient alors* 1.999977111991028 *(qui est une valeur approchée de* u_{16}*).*

Dans la suite du chapitre, on considèrera que les suites sont définies sur $\mathbb{N}$ mais les résultats sont également valables pour une suite u définie sur une partie I infinie de $\mathbb{N}$.

3 Convergence des suites réelles

3.1 Définitions

Définition 3.1 : *Suite convergente, divergente*

On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge vers le réel** l si tout intervalle ouvert contenant l contient les termes u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux.
Comme tout intervalle ouvert contenant l contient un intervalle du type $[l-\varepsilon, l+\varepsilon]$, on obtient une définition équivalente :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

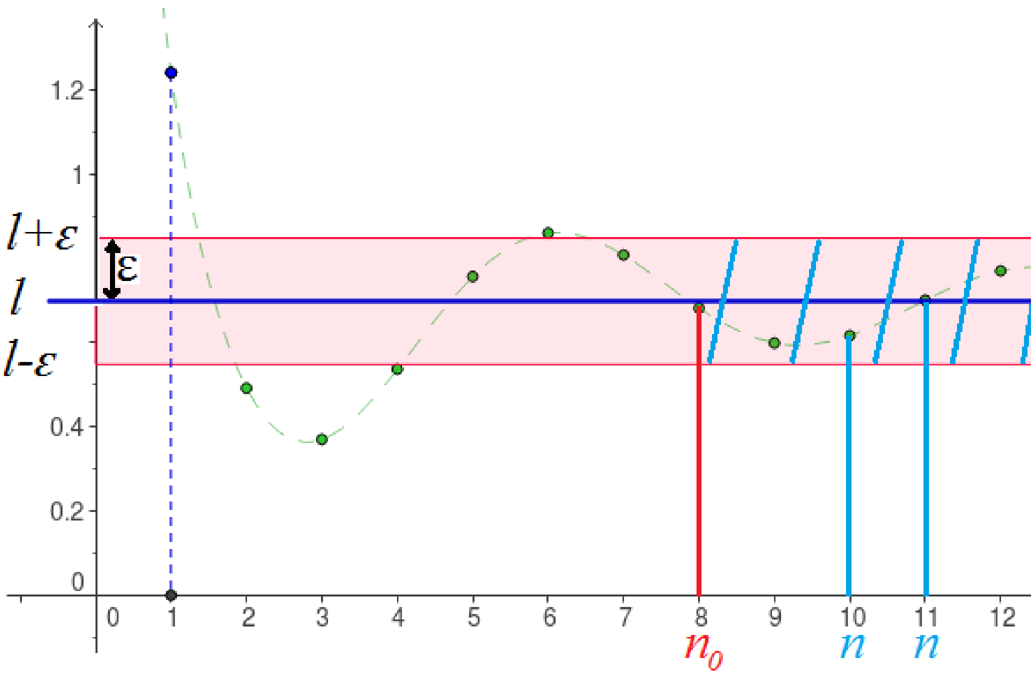
On dit alors que l est la **limite** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l.$$

Une suite qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

On rappelle que

$$|u_n - l| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad l-\varepsilon \leq u_n \leq l+\varepsilon.$$



Le rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont tels que $|u_n - l| \leq \varepsilon$ dépend en général de ε.

Exemple 9. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \dfrac{n+1}{3n}$ et $\varepsilon > 0$. Déterminer un entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$,*

$$\left| u_n - \frac{1}{3} \right| \leq \varepsilon.$$

Solution.

Théorème 3.2 : *Unicité de la limite*

La limite d'une suite convergente est unique.

Démonstration. On suppose qu'il existe deux réels l et l' vérifiant tous les deux la proposition énoncée, c'est-à-dire pour $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \exists n_0' \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0', \quad |u_n - l'| \leq \varepsilon.$$

Si on pose $N = \max(n_0, n_0')$, alors $\forall n \geq N$

$$|u_n - l| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad |u_n - l'| \leq \varepsilon.$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire,

$$|l - l'| = |(l - u_n) + (u_n - l')| \leq |u_n - l| + |u_n - l'| \leq 2\varepsilon.$$

D'après l'exemple 6, cela implique que

$$l - l' = 0.$$

Ainsi $l = l'$ et ceci prouve bien l'unicité de la limite. $\square$

Remarque 3.3 : *Attention aux a priori !*

(i) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Mais la réciproque est fausse : par exemple, $u_n = \ln n$ définit une suite telle que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ mais $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas.

(ii) $\left(u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l\right) \quad \Leftrightarrow \quad \left(u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \text{ et } u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l\right).$

3.2 Propriétés des suites convergentes

Propriété 3.4 : *Suite convergente*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est convergente} \quad \Rightarrow \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée.}$$

Démonstration. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite l. D'après la définition de la convergence :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \varepsilon.$$

Cette assertion étant vraie $\forall \varepsilon > 0$, elle est vraie par exemple pour $\varepsilon = 1$. Ainsi :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq 1.$$

À partir du rang n_0, la suite est bornée car :

$$\forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq 1 \quad \Rightarrow \quad l - 1 \leq u_n \leq l + 1 \quad \Rightarrow \quad |u_n| \leq \max(|l-1|, |l+1|).$$

Avant le rang n_0, la suite est aussi bornée car :

$$\forall n \in [\![0, n_0]\!], \quad |u_n| \leq \max(|u_0|, \ldots, |u_{n_0-1}|).$$

Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq \max(|u_0|, \ldots, |u_{n_0-1}|, |l-1|, |l+1|).$$

$\square$

La réciproque est fausse : par exemple, $u_n = (-1)^n$.

3.3 Convergence et opérations

Proposition 3.5 : *Opérations sur les limites*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles convergentes et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_nv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n + \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda \times u_n = \lambda \times \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration. Soient l et l' tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l'$.

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ et

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad \exists n_0' \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0', \quad |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si on pose $N = \max(n_0, n_0')$, alors $\forall n \geq N$

$$\left|(u_n+v_n)-(l+l')\right| = \left|(u_n-l)+(v_n-l')\right| \leq |u_n-l| + |v_n-l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, elles sont bornées. En considérant le maximum de deux bornes de leurs valeurs absolues, il existe un M >0 tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leq M \quad \text{et} \quad |v_n| \leq M.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Alors $\frac{\varepsilon}{2M} > 0$ et

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \frac{\varepsilon}{2M} \quad \text{et} \quad \exists n_0' \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0', \quad |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Si on pose $N = \max(n_0, n_0')$, alors $\forall n \geq N$

$$\begin{array}{rcl} \left|(u_n \times v_n) - (l \times l')\right| & = & \left|(u_n \times v_n - u_n \times l') + (u_n \times l' - l \times l')\right| \\ & = & \left|u_n \times (v_n - l') + (u_n - l) \times l'\right| \\ \text{(inégalité triangulaire)} & \leq & \left|u_n \times (v_n - l')\right| + \left|(u_n - l) \times l'\right| \\ & \leq & |u_n| \times |v_n - l'| + |u_n - l| \times |l'| \\ & \leq & M \times \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M} \times M \leq \varepsilon \end{array}$$

(iii) Il suffit de considérer le cas d'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ constante égale à λ dans (ii).

$\square$

Proposition 3.6 : *Comportement asymptotique*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. Alors :

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = |l|$,

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée $\quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n = 0$.

(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ et $l \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists p \in \mathbb{N}, \quad \left(\frac{1}{u_n}\right)_{n\geq p}$ soit bien définie et convergente de limite $\frac{1}{l}$.

Démonstration. Démonstration à faire en exercice. $\square$

La réciproque de (i) est fausse : par exemple, $u_n = (-1)^n$.

3.4 Convergence et ordre

Théorème 3.7 : *Théorème de prolongement des inégalités*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang p,

$$\forall n \geq p, \quad u_n \leq v_n.$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \text{ et } \lim_{n\to+\infty} v_n = l' \quad \Rightarrow \quad l \leq l'.$$

Si on a $u_n < v_n$ au lieu de $u_n \leq v_n$, la conclusion reste $l \leq l'$: les inégalités strictes deviennent larges après passage à la limite.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \varepsilon \quad \text{ et } \quad \exists n_0' \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0', \quad |v_n - l'| \leq \varepsilon.$$

Si on pose $N = \max(n_0, n_0', p)$, alors $\forall n \geq N$

$$l - \varepsilon \leq u_n \quad \text{ et } \quad v_n \leq l' + \varepsilon.$$

Comme $\forall n \geq N$, $u_n \leq v_n$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad l - \varepsilon \leq l' + \varepsilon.$$

Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0, \quad -2\varepsilon \leq l' - l.$$

Ce qui donne

$$0 \leq l' - l \quad \text{ et donc } \quad l \leq l'.$$

□

Théorème 3.8 : *Théorème d'encadrement*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang p,

$$\forall n \geq p, \quad u_n \leq v_n \leq w_n.$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \text{ et } \lim_{n\to+\infty} w_n = l \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} v_n = l.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0, \quad |u_n - l| \leq \varepsilon \quad \text{ et } \quad \exists n_0' \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq n_0', \quad |w_n - l| \leq \varepsilon.$$

Si on pose $N = \max(n_0, n_0', p)$, alors $\forall n \geq N$

$$l - \varepsilon \leq u_n \quad \text{ et } \quad w_n \leq l + \varepsilon.$$

Comme $\forall n \geq N$, $u_n \leq v_n \leq w_n$, alors

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \quad l - \varepsilon \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq l + \varepsilon.$$

On en conclut donc

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N, \quad |v_n - l| \leq \varepsilon.$$

Ce qui revient à $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$. □

Exemple 10. *Montrer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k}.$$

Solution.

3.5 Suites tendant vers l'infini

Définition 3.9 : *Limite infinie*

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** (ou tend) vers $+\infty$ si tout intervalle du type $[A,+\infty[$ contient les termes u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux.
  En d'autres termes,
  $$\forall A>0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N} \text{ tel que } \forall n\geq n_0,\quad u_n\geq A.$$
  On note :
  $$\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$
- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge** (ou tend) vers $-\infty$ si tout intervalle du type $]-\infty,A]$ contient les termes u_n pour tous les indices n, sauf pour un nombre fini d'entre eux.
  En d'autres termes,
  $$\forall A<0,\quad \exists n_0\in\mathbb{N} \text{ tel que } \forall n\geq n_0,\quad u_n\leq A.$$
  On note :
  $$\lim_{n\to+\infty} u_n=-\infty \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty.$$

Dans les deux cas, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite infinie.

Étudier la **convergence d'une suite**, c'est déterminer si l'on est dans l'une de ces 4 configurations suivantes :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge (*i.e.* tend vers une limite finie),
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$,
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et ne tend ni vers $-\infty$, ni vers $+\infty$.

Théorème 3.10 : *Théorème de comparaison*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles qu'à partir d'un certain rang p,
$$\forall n\geq p,\quad u_n\leq v_n.$$
Alors

(i) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty.$

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=-\infty \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{n\to+\infty} u_n=-\infty.$

Démonstration. (i) On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$. Soit $A>0$. Alors
$$\exists n_0\in\mathbb{N} \text{ tel que } \forall n\geq n_0,\quad u_n\geq A.$$
Si on pose $N=\max(n_0,p)$, alors $\forall n\geq N$
$$A\leq u_n\leq v_n.$$
Ce qui signifie $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n=+\infty$.

(ii) La démonstration est similaire à (i).

□

3.6 Théorème de la limite monotone

Théorème 3.11 : *Théorème de la limite monotone*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On a les implications suivantes :

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée $\Rightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

(ii) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée $\Rightarrow$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée $\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration. (i) Distinguons le cas d'une suite croissante majorée et non majorée.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et majorée. On va montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
D'après le théorème 1.4, toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure finie. Si l'ensemble $\{u_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ est majoré, il admet une borne supérieure finie : notons-la l.
Puisque l est le plus petit des majorants, pour $\varepsilon>0$, $l-\varepsilon$ n'est pas un majorant de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donc
$$\exists N\in\mathbb{N},\quad l-\varepsilon\le u_N.$$
La propriété de croissance donne alors pour $n\ge N$, $u_n\ge u_N$. Ainsi
$$n\ge N,\quad l-\varepsilon\le u_N\le u_n\le l\le l+\varepsilon.$$
On retrouve la définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l, à savoir
$$\forall\varepsilon>0,\quad \exists N\in\mathbb{N}\text{ tel que }\forall n\ge N,\quad |u_n-l|\le\varepsilon.$$
- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et non majorée. On va montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée, donc pour $A>0$, $\exists N\in\mathbb{N}$ tel que $u_N\ge A$. Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a
$$\forall A>0,\quad \exists N\in\mathbb{N}\text{ tel que }\forall n\ge N,\quad u_n\ge u_N\ge A.$$
On retrouve bien la définition de la divergence vers $+\infty$ de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(ii) Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, on applique ce qui précède à la suite croissante $(-u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

□

Exemple 11. *Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par*
$$u_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}.$$

Solution.

Exemple 12. *On pose $u_0=2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,*
$$u_{n+1}=\frac{u_n}{1+n\,u_n^2}.$$
Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive. En déduire qu'elle converge.

Solution.

3.7 Suites adjacentes

Définition 3.12 : *Suites adjacentes*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **adjacentes** si :

(i) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante,

(ii) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,

(iii) $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème 3.13 : *Limite de suites adjacentes*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ et les deux suites tendent vers une même limite $l \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$.
On étudie la monotonie de la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Notons $x_n = v_n - u_n$. Alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} - x_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n).$$

D'après les hypothèses (i) et (ii), pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-u_{n+1} \leq -u_n$ et $v_{n+1} \leq v_n$,

$$(v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) \leq (v_n - u_n) - (v_n - u_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{n+1} - x_n \leq 0.$$

La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et tend vers 0 (d'après (iii)), donc $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à termes positifs.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leq v_n.$$

Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0 et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0, donc d'après le théorème 3.11 de la limite monotone, les deux suites convergent. Ainsi d'après l'hypothèse (iii),

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n.$$

$\square$

Exemple 13. *Soient a, b deux réels strictement positifs tels que $a \leq b$. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et*

$$\begin{cases} u_{n+1} &= \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} &= \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. En déduire qu'elles convergent vers la même limite. Cette limite s'appelle la moyenne arithmético-géométrique de a et b.

Solution.

4 Suites usuelles

4.1 Suites arithmétiques

Définition 4.1 : *Suite arithmétique*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et r un réel. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique** de paramètre r si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + r.$$

Proposition 4.2 : *Terme général d'une suite arithmétique*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique réelle de paramètre r. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + r\,n.$$

Démonstration. Démonstration par récurrence à faire en exercice. □

Exemple 14. *Une suite arithmétique a pour termes $u_{12} = 37$ et $u_6 = 7$. Déterminer sa raison et son premier terme u_0.*

Solution.

Théorème 4.3 : *Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique réelle de paramètre r. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n+1}{2}\left(u_0 + u_n\right).$$

Démonstration. Démonstration par récurrence à faire en exercice. □

4.2 Suites géométriques

Définition 4.4 : *Suite géométrique*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle et q un réel. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique** de paramètre q si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q\,u_n.$$

Proposition 4.5 : *Terme général d'une suite géométrique*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique réelle de paramètre q. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0\,q^n.$$

Démonstration. Démonstration par récurrence à faire en exercice. □

Exemple 15. *On pose $u_1 = \frac{1}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

$$u_{n+1} = \frac{n+1}{3n}\,u_n.$$

Montrer que la suite définie par $v_n = \frac{u_n}{n}$ est géométrique et déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

Solution.

Théorème 4.6 : *Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique réelle de paramètre q. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} u_k = \begin{cases} u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1, \\ u_0\,(n+1) & \text{si } q = 1. \end{cases}$$

Démonstration. Démonstration par récurrence à faire en exercice. □

4.3 Suites arithmético-géométriques

Définition 4.7 : *Suite arithmético-géométrique*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, q et r deux réels. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmético-géométrique** de paramètres (q, r) si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q\,u_n + r.$$

Définition 4.8 : *Équation caractéristique*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique de paramètres (q, r) avec $q \neq 1$. Son **équation caractéristique** est définie comme étant l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x = q\,x + r.$$

On note λ la solution de cette équation caractéristique. On remarque que $\lambda = \dfrac{r}{1-q}$.

Proposition 4.9 : *Terme général d'une suite arithmético-géométrique*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmético-géométrique réelle de paramètres (q, r) avec $q \neq 1$. Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (u_0 - \lambda)\,q^n + \lambda \quad \text{avec } \lambda = \frac{r}{1-q}.$$

Démonstration. On remarque que

$$u_{n+1} - \lambda = q\,u_n + r - \lambda = (q\,u_n + r) - (q\,\lambda + r) = q\,(u_n - \lambda)\,.$$

On définit alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_n - \lambda.$$

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite géométrique de raison q. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = v_0\,q^n,$$

d'où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (u_0 - \lambda)\,q^n + \lambda.$$

□

Exemple 16. *Déterminer en fonction de ses paramètres la nature et, le cas échéant, la limite d'une suite arithmético-géométrique.*

Solution.

4.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Définition 4.10 : *Suite récurrente linéaire d'ordre 2*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, a et b deux réels. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **récurrente linéaire d'ordre** 2 de paramètres (a, b) si

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n.$$

Définition 4.11 : *Équation caractéristique*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 de paramètres (a, b). Son **équation caractéristique** est définie comme étant l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$x^2 - ax - b = 0.$$

Proposition 4.12 : *Terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique

$$(**) : \ x^2 - ax - b = 0.$$

Alors deux configurations différentes sont possibles :

(i) Si $(**)$ possède deux solutions réelles x_1 et x_2, alors $\exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda\, x_1^n + \mu\, x_2^n.$$

(ii) Si $(**)$ possède une unique solution réelle $x_0 = \dfrac{a}{2}$, alors $\exists\,(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (\lambda\, n + \mu)\ x_0^n.$$

Démonstration. La démonstration sera faite dans le chapitre Compléments sur les espaces vectoriels. □

Exemple 17. *Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 2\, u_{n+1} - u_n.$$

Solution.

Exemple 18. *Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = 3\, u_{n+1} - 2\, u_n.$$

Solution.

4.5 Limites classiques

Propriété 4.13 : *Limite d'une puissance*

Soit a un réel strictement positif. On a les propositions suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} n^a = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^a} = 0.$$

Propriété 4.14 : *Limite d'une suite géométrique*

Soit q un réel. On a les propositions suivantes :

(i) si $|q| < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$,

(ii) si $q > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$,

(iii) si $q = 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 1$,

(iv) si $q \leq -1$, alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge et ne possède pas de limite finie ou infinie.

4.6 Croissances comparées

Proposition 4.15 : *Règle de D'Alembert (hors programme)*

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle à termes strictement positifs et $\lambda \in \mathbb{R}_+$. On suppose que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda.$$

Alors :

(i) si $\lambda < 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$,

(ii) si $\lambda > 1$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Démonstration. L'idée de la démonstration est de voir que pour n grand,

$$u_{n+1} \approx \lambda\, u_n$$

On retrouve alors une suite géométrique et la différenciation des limites s'en déduit. □

Exemple 19. *Déterminer* $\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n^2}$.

Solution.

Propriété 4.16 : *Croissances comparées*

Soient a et b deux réels strictement positifs et $q > 1$. On a les propositions suivantes :

(i) $\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln(n))^b}{n^a} = 0$.

(ii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{q^n} = 0$.

(iii) $\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$.

(iv) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

Démonstration. Les points (ii), (iii) et (iv) peuvent se déduire de la proposition précédente. Le point (i) est admis. □

En particulier pour $q = e$ dans (ii), on a $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{e^n} = 0$.