ECG1 *TD n°1 : Logique et raisonnements mathématiques*

Exercice 1. Autour de l'implication

Trouver des propositions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ telles que

1. $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est vrai et $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$ est vrai.
2. $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est faux et $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$ est vrai.
3. $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ est faux et $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$ est faux.

Exercice 2. Des quantificateurs au texte

Donner la signification des assertions suivantes :

1. $\forall x > 0, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad N > x.$
2. $\exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x > 0, \quad N > x.$

Exercice 3. Du texte aux quantificateurs

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

1. f est constante ;
2. f n'est pas constante ;
3. f s'annule ;
4. f est périodique.

Exercice 4. Vrai/Faux

Dire si ces propositions sont vraies.

1. Pour que le produit de deux réels soit positif, il suffit que ces réels soient positifs.
2. Il est nécessaire que $x > 0$ pour que $2x + 3 > 0$.
3. Pour que $x = 2$, il faut que $x^2 = 4$.

Exercice 5. Nier des assertions avec quantificateurs

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0.$
2. $\forall M > 0,\ \exists A > 0,\ \forall x \geq A,\ f(x) > M.$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) > 0 \implies x \leq 0.$
4. $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \forall (x, y) \in I^2,\ \big(|x - y| \leq \eta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon\big).$

Exercice 6. Proposition sur les fonctions

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère la proposition $\mathcal{P}$ suivante :

$$\mathcal{P} = \text{"}\exists t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) < t\text{"}.$$

1. Écrire la négation de $\mathcal{P}$.
2. Donner un exemple de fonction f qui vérifie $\mathcal{P}$; un exemple qui ne vérifie pas $\mathcal{P}$.
3. Parmi les propositions ci-dessous, déterminer celles qui sont équivalentes à $\mathcal{P}$, celles qui sont toujours vraies, celles qui sont toujours fausses, et celles pour lesquelles on ne peut rien dire.
   (a) $\mathcal{P}_1 = \text{"}\exists x \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ f(t) < x\text{"}$
   (b) $\mathcal{P}_2 = \text{"}\exists t \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(t) < x\text{"}$
   (c) $\mathcal{P}_3 = \text{"}\forall t \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) < t\text{"}$
   (d) $\mathcal{P}_4 = \text{"}\forall t \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R},\ f(t) < x\text{"}$

Exercice 7. Irrationnel

En raisonnant par l'absurde, montrer que $\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$ est irrationnel.

Exercice 8. Carré d'un entier

Soit $n > 0$. Démontrer que si n est le carré d'un entier, alors $2n$ n'est pas le carré d'un entier.

Exercice 9. Inégalités

Montrer que si $x < 1$ alors $|x - 4| > 3$.

Exercice 10. Divisibilité par 8

Montrer que si $(n^2 - 1)$ n'est pas divisible par 8, alors n est pair.

Exercice 11. Suite de Fibonacci

On considère la suite (u_n) (suite de Fibonacci) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+2} = u_n + u_{n+1}.$$

Démontrer que la suite (u_n) vérifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n u_{n+2} - u_{n+1}^2 = (-1)^n.$$

Exercice 12. Somme de tous les termes précédents

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Démontrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = 2^{n-1}.$$

Exercice 13. Récurrence forte

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \dfrac{1}{x}$ soit un entier. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ est un entier.

Indication : on pourra calculer $\left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right)\left(x + \dfrac{1}{x}\right)$.

Exercice 14. Une inégalité

Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|x - 1| \leq x^2 - x + 1.$$

Exercice 15. Erreur classique ?

La proposition suivante est-elle vraie ?

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = x.$$