Exercice 1. Entraînement à la dérivation

1. Dériver les fonctions suivantes après avoir déterminé leur ensemble de définition :

$$f : x \mapsto x \ln \left(\frac{x+2}{3x-1} \right) \quad g : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - \frac{1}{\sqrt{2x+3}} \quad h : x \mapsto (1 + \ln(x))^2 e^{\frac{1}{x}+2x}$$

$$u : x \mapsto \cos(\sqrt{1-x^2}) \quad v : x \mapsto \sqrt{\frac{x}{x^2+5}}$$

2. Etudier les variations des fonctions suivantes :

$$f : x \mapsto \sqrt{2 - \ln x} \quad g : x \mapsto \sqrt{x - \sqrt{x}} \quad h : x \mapsto \frac{x}{x - \ln x}$$

Exercice 2. Continuité et dérivabilité en un point

Etudier la continuité et la dérivabilité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition.

$$a(x) = \begin{cases} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad b(x) = \begin{cases} \frac{\exp(2x^2) - 1}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$c(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x+1}\right) & \text{si } x \neq -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \end{cases} \quad d(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 3. Parité de la dérivée

Soit f une fonction dérivable et paire sur I . Montrer que f' est impaire sur I .

Exercice 4. Fonction de classe C^1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x|x|$. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Point anguleux

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = |\ln(x)|$.

1. Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.
2. Etudier la dérivabilité de f , puis calculer sa dérivée là où elle est dérivable.

Exercice 6. Bijection et sa réciproque

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = e^{1+\frac{2}{x}}.$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle à préciser et donner le tableau de variations de f^{-1} .
2. Justifier la dérivabilité de f^{-1} sur son ensemble de définition, et calculer $(f^{-1})'(e^3)$ puis $(f^{-1})'(e^5)$
3. Déterminer f^{-1} et retrouver les résultat des questions précédentes.

Exercice 7. Fonction Arcsinus

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|\sin(x)| \leq |x|.$$

2. Prouver que la fonction sinus définit une bijection de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle que l'on déterminera.
3. On note g sa fonction réciproque. Dresser le tableau de variation de g .
4. Déterminer alors l'ensemble de dérivabilité de g .
5. Dessiner sur un même graphique l'allure de la courbe du sinus sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et l'allure de g .
6. Calcul de la dérivée de g .

(a) Montrer que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\cos^2(g(x)) = 1 - x^2.$$

(b) Montrer alors que pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 8. Théorème de Rolle

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que

$$e^{-a} f(a) = e^{-b} f(b).$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = f(c)$.

Exercice 9. Généralisation du théorème de Rolle

On considère une fonction g continue et dérivable sur $[0, +\infty[$, telle que

$$g(0) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0.$$

Le but est de généraliser le théorème de Rolle, à savoir que sous ces hypothèses, il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $g'(c) = 0$. On introduit la fonction G définie sur $[0, 1]$ par

$$G(x) = \begin{cases} g\left(\frac{1}{x} - 1\right) & \text{si } x \in]0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Justifier que G est continue sur $[0, 1]$ et dérivable sur $]0, 1[$.
2. Montrer que G' s'annule sur $]0, 1[$.
3. En déduire qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que $g'(c) = 0$.

Exercice 10. Somme partielle

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

1. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Appliquer le théorème des accroissements finis sur $[k-1, k]$ à la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = -\frac{1}{x}.$$

2. En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

Exercice 11. Suite et inégalité des accroissements finis

Soit l'équation

$$(E) : x^3 - 3x + 1 = 0.$$

1. Montrer que l'équation (E) admet exactement trois solutions réelles α , β et γ telles que

$$\alpha < -1 < \beta < 1 < \gamma.$$

2. Approximation de β .

(a) Justifier que $\beta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ puis vérifier que β est aussi solution de l'équation $\frac{x^3 + 1}{3} = x$.

(b) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) = \frac{x^3 + 1}{3}.$$

Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$,

$$g(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \text{et} \quad |g'(x)| \leq \frac{1}{4}.$$

(c) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = g(u_n).$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

(d) Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{4} |u_n - \beta|$$

puis que

$$|u_n - \beta| \leq \frac{1}{4^n} \times \frac{1}{2}.$$

(e) En déduire que la suite (u_n) converge vers β .

(f) Ecrire un programme Python qui renvoie une valeur approchée de β à 10^{-5} près.