TD n°11 : Matrices

Exercice 1.

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&2\\0&4\end{pmatrix}$ et $C=\begin{pmatrix}2&0\\7&-4\end{pmatrix}$.

1. Calculer $A+B$, $2A-B$, AB, BA, ${}^t(AB)$ et ${}^tB\,{}^tA$ (vérifier l'égalité), puis $3(A-2B)+2(3B+C)-(2A+C)$
2. Résoudre l'équation $A-3X=2B$ d'inconnue $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 2.

Calculer lorsque c'est possible les produits AB et BA :

1. $A=\begin{pmatrix}3&0\\1&-2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}1&2\\0&-1\\5&8\end{pmatrix}$ 2. $A=\begin{pmatrix}-1&0&2\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$ 3. $A=\begin{pmatrix}3&1&0\\1&-1&0\\0&0&3\end{pmatrix}$ et $B={}^tA$.

Exercice 3.

Soient $A,B\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Développer et simplifier

$$S=(2A)(3B)-(A+2B)^2+(A-B)(A+B) \text{ et } T=(A+B)(2A^2-2B)-2A^2(A+B)+(-A+B)^2.$$

Exercice 4.

Déterminer toutes les matrices triangulaires supérieures $T\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $T^2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$.

Exercice 5.

1. Déterminer toutes les matrices $M\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&3&0\\0&0&5\end{pmatrix}$.
2. Soit D la matrice diagonale d'ordre n, de coefficients diagonaux : 1,2,...,n. Déterminer toutes les matrices qui commutent avec D.

Exercice 6.

Calculer J^n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, où $J=\begin{pmatrix}2&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$.

Exercice 7.

1. Soient A et B deux matrices non nulles vérifiant $AB=0$. Montrer que ni A ni B n'est inversible.
2. Soit $C=\begin{pmatrix}1&-1\\2&-2\end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que $P(X)=X^2+X$ est annulateur de C (i.e. $P(C)$ est la matrice nulle).
   (b) En déduire que C n'est pas inversible.

Exercice 8.

Soit $A=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&2&0\\1&0&-1\end{pmatrix}$

1. Montrer que $A^3-A^2-A+I=0$. En déduire que A est inversible.
2. Expliciter A^{-1}.
3. Calculer $(A^2)^{-1}$.

Exercice 9.

Soit $A=\begin{pmatrix}3&0&2&0\\0&-1&0&2\\-2&0&-1&0\\0&-2&0&3\end{pmatrix}$.

1. Vérifier $(A-I_4)^2=0$.
2. Préciser un polynôme annulateur de A. Montrer alors que A est inversible et expliciter la matrice A^{-1}.
3. En remarquant que $A=(A-I_4)+I_4$, calculer A^n pour $n\geq 2$.
   La formule est-elle encore vraie pour $n=0$ et $n=1$? et $n=-1$?

Exercice 10.

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = A - 2I_3$.

1. Montrer que $B^2 = 3B$.
2. En déduire par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = 2^n I_3 + \dfrac{5^n - 2^n}{3} B$.
3. Retrouver ce résultat en utilisant la formule du binôme de Newton.

Exercice 11.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, telle que $X^2 = 0$. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (I_p + X)^n = I_p + nX.$$
2. Soit $Y \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, telle que $Y^2 = Y$. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad (I_p + Y)^n = I_p + (2^n - 1)Y.$$
3. On pose $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & -10 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer et expliciter pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ A^n et B^n.

Exercice 12.

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = A + 2I$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels u_n et v_n tels que
$$A^n = u_n A + v_n I.$$
On précisera les relations de récurrence entre u_{n+1}, v_{n+1} et u_n, v_n.
4. On pose $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$. Reconnaître les suites (α_n) et (β_n)
5. En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n, puis A^n en fonction de n.

Exercice 13.

Une matrice M est dite *nilpotente* s'il existe un entier naturel non nul k tel que $M^k = 0$. Soient A et B deux matrices qui commutent.

1. Montrer que si A est nilpotente alors AB l'est aussi.
2. Montrer que si A et B sont toutes les deux nilpotentes alors $A + B$ l'est aussi.

Exercice 14.

Soit p un entier supérieur ou égal à 2 et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que
$$I - A^p = (I - A) \sum_{k=0}^{p-1} A^k.$$
2. On suppose dorénavant que $A^p = 0_n$ et $A^{p-1} \neq 0_n$ (A est nilpotente d'indice p).
   (a) Montrer que A n'est pas inversible.
   (b) En utilisant 1., montrer que $I - A$ est inversible et exprimer son inverse en fonction de A.

Exercice 15.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

1. On suppose que $\mathcal{S}$ est non vide et on considère $M \in \mathcal{S}$.
   (a) Montrer que $AM = MA$.
   (b) La matrice A est-elle inversible ? Montrer alors que M n'est pas inversible.
   (c) On pose $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Déduire des deux questions précédentes que $a = d = c = 0$.
2. Montrer que $\mathcal{S}$ est vide.