ECG1 # *TD n°17 : Séries numériques*

Exercice 1. Télescopage

1. Pour $k \geq 2$ on définit
$$u_k = \frac{\ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right)}{\ln(k)\ln(k+1)}.$$
Déterminer la nature de la série $\sum_{k\geqslant 2} u_k$ et, en cas de convergence, calculer sa somme.

2. Soit (a_n) une suite convergente de limite a.
Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0}(a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n)$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 2. Séries de référence

1. Montrer que les séries suivantes convergent et déterminer leur somme :
$$\text{(a)} \sum_{k\geqslant 1}(-1)^k k e^{-k} \qquad \text{(b)} \sum_{k\geqslant 1}\frac{3k^2+1}{2^k} \qquad \text{(c)} \sum_{k\geqslant 0}\frac{k+2^k}{k!}$$

2. Soient p et q sont deux réels de l'intervalle $]0,1[$ tels que $p+q=1$. Justifier la convergence puis calculer et simplifier la somme des séries :
$$\text{(a)} \sum_{k\geqslant 2}\left(pq^{k-1} + qp^{k-1}\right) \qquad \text{(b)} \sum_{k\geqslant 1}\left(pq^{k-1}\right)^2 \qquad \text{(c)} \sum_{k\geqslant 1} k\,\frac{2pq^k}{1+q}$$

Exercice 3. Critère de comparaison par équivalence

Donner la nature de la série de terme général u_k dans chacun des cas suivants :

$$1.\ u_k = \frac{k^2-1}{k^5-1} \qquad 2.\ u_k = \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} \qquad 3.\ u_k = \sqrt{k^3+1} - \sqrt{k^3} \qquad 4.\ u_k = \sqrt{\frac{2^k-1}{3^k+1}}$$

Exercice 4. Critère de comparaison par négligeabilité

Donner la nature de la série de terme général u_k dans chacun des cas suivants :

$$1.\ u_k = \frac{k^5}{e^k} \qquad 2.\ u_k = \frac{1}{\sqrt{k}\ln k} \qquad 3.\ u_k = \frac{\ln k}{k\sqrt{k}}$$

Exercice 5. Critère de comparaison par inégalité

Donner la nature de la série de terme général u_k dans chacun des cas suivants :

$$1.\ u_k = \frac{5}{4^k \ln k} \qquad 2.\ u_k = \frac{1}{e^k + e^{-k}}$$

Exercice 6. Utilisation des développements limités

Donner la nature de la série de terme général u_k dans chacun des cas suivants :

$$1.\ u_k = \cos\left(\frac{\pi}{k}\right) \qquad 2.\ u_k = \sqrt{\frac{e^{\frac{1}{k}} + e^{-\frac{1}{k}}}{2} - 1} \qquad 3.\ u_k = e^{2/k} - 1 - \frac{2}{k}$$

$$4.\ u_k = 1 + \frac{1}{k^2} - \cos\left(\frac{1}{k}\right) \qquad 5.\ u_k = k\sin\left(\frac{1}{k}\right) - 1.$$

Exercice 7. Terme général défini par une intégrale

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que la série de terme général $\dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt$ est convergente.

Exercice 8. Somme des termes d'une suite récurrente

Soit a un élément de $]0,1[$ et (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{cases}$$

1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n^2$ est convergente et déterminer sa somme.
3. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
4. Quelle est la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} u_n$?

Exercice 9. Utilisation d'une série télescopique

Soit α un réel strictement positif.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\quad u_n(\alpha) = \dfrac{n!}{\prod\limits_{k=0}^{n} (\alpha + k)}$

1. (a) Montrer que la suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et convergente.
   On note $\ell(\alpha)$ la limite de la suite $(u_n(\alpha))_{n \in \mathbb{N}}$.
   (b) Que peut-on en déduire de la série de terme général $(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$?
   (c) On suppose que $\ell(\alpha)$ est non nulle.
   Démontrer que : $\quad u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{\alpha \ell(\alpha)}{n}$
   (d) Déduire de ce qui précède que $\ell(\alpha) = 0$.
2. On suppose que $\alpha \in]0,1]$.
   (a) Démontrer par récurrence que :
   $$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_n(\alpha) \geqslant \frac{1}{n+\alpha}$$
   (b) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$?

Exercice 10. Reste d'une série convergente

On considère l'application réelle $f : x \mapsto x^3\, e^x$.

1. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geq 1} \dfrac{1}{f(n)}$ converge. On note désormais $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{f(n)}$.
2. Montrer que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(k)} \right| \leq \frac{1}{(e-1)e^n}.$$
3. En déduire un programme *Python* qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Exercice 11. Constante d'Euler-Mascheroni

On note pour tout $n \geq 1$,

$$w_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) - \ln(n).$$

1. Rappeler un développement limité d'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{1+x}$.
2. Montrer alors que
   $$w_{n+1} - w_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$
3. Montrer que la série de terme général $(w_{n+1} - w_n)$ converge, puis que la suite (w_n) converge.