TD n°4 : Suites réelles

Exercice 1. Encadrements

On considère les intervalles $I = [2,5]$ et $J = [4,20]$. Soit $x \in I$ et $y \in J$. A quels intervalles appartiennent les nombres suivants ?

$$a = x + 3y \qquad b = 2y - 4x \qquad c = x\,y \qquad d = \frac{y}{x}.$$

Exercice 2. Valeur absolue

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $|2x - 3| = 1$
2. $|x^2 + x + 1| = |x|$
3. $|-x + 5| \leq 3$
4. $|x - 4| \leq |2x + 1|$
5. $|x^3 + x^2 - 1| + 3 \leq 0$

Exercice 3. Maximum

Vérifier que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2}$$

Exercice 4. Partie entière

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor .$$
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$0 \leq \lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor \leq 1.$$
3. Comparer $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor -x \rfloor$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Sens de variation de suites

Etudier le sens de variation des suites définies par :

$$u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \right) - n \qquad v_n = \frac{e^{2n}}{n!} \qquad w_n = \frac{\ln(n)}{n} \; (n \in \mathbb{N}^*) \qquad x_n = \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

Exercice 6. Nature des suites

Déterminer, si elle existe, la limite des suites suivantes :

1. $u_n = \dfrac{\sin(n) + 3\cos\left(n^2\right)}{\sqrt{n}}$
2. $u_n = \dfrac{2n + (-1)^n}{5n + (-1)^{n+1}}$
3. $u_n = \dfrac{n^3 + 5n}{4n^2 + \sin(n) + \ln(n)}$
4. $u_n = \sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + 1}$
5. $u_n = \dfrac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$
6. $u_n = 3^n e^{-3n}$.

Exercice 7. Factorielles

1. Montrer que
$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n-2} k! = 0$$
2. En déduire la limite de
$$u_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} k!$$

Exercice 8. Vrai ou faux

1. Est-il vrai que : $|u_n| \longrightarrow |l| \iff u_n \longrightarrow l$?
2. Trouver des suites réelles (u_n) vérifiant :
   (a) (u_n) est bornée mais ne converge pas.
   (b) (u_n) est strictement croissante et majorée.
   (c) (u_n) n'a pas de limite et $(1/u_n)$ converge.
   (d) (u_n) et (v_n) divergent et $(u_n + v_n)$ $\big($resp. $(u_n v_n)\big)$ converge.
   (e) (u_n) est croissante majorée par M et ne converge pas vers M.
   (f) (u_n) admet comme limite $+\infty$ et n'est pas croissante à partir d'un certain rang.

Exercice 9. Croissances comparées

1. Soit (u_n) une suite de réels positifs telle qu'il existe un réel $\lambda \in]0,1[$ et un entier n_0 tels que :

$$\forall\, n \geqslant n_0,\ u_{n+1} \leqslant \lambda u_n$$

   Montrer que (u_n) converge vers 0.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \dfrac{x^n}{n!}$ avec $x \in]1,+\infty[$ fixé.
   (a) Montrer qu'il existe un rang n_0 tel que : $\forall\, n \geqslant n_0,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}$
   (b) En déduire la limite de la suite (u_n).
   (c) Que peut-on dire quand x n'appartient pas à $]1,+\infty[$?

Exercice 10. Utilisation d'une suite géométrique

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_1 = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{2}{3^{n+1}}$$

On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = u_n + \frac{2}{3^n}$$

1. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique. Donner son premier terme et sa raison.
2. Calculer u_n en fonction de n.

Exercice 11. Suite arithmético-géométrique

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = -\frac{1}{2}\,u_n - \frac{3}{2}$$

Exprimer u_n en fonction de n, puis déterminer la limite de la suite (u_n), si elle existe.

Exercice 12. Suite récurrente linéaire d'ordre 2

On considère la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = -4$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$$

Exprimer u_n en fonction de n, puis déterminer la limite de la suite (u_n), si elle existe.

Exercice 13. Suite récurrente d'ordre 2

On considère la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $u_1 = \dfrac{e}{2}$ et

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+2} = 2\frac{u_{n+1}^3}{u_n}.$$

1. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie ainsi que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$v_n = \ln(2\,u_n)\,.$$

2. Donner le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 14. Suites intriquées

Soient u et v les deux suites définies pour tout $n \geqslant 0$ par :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n)$$

1. On pose $t_n = u_n - v_n$ et $s_n = u_n + v_n$.
   Exprimer t_n (respectivement s_n) en fonction de n et t_0 (respectivement s_0).
2. En déduire l'expression de u_n et de v_n en fonction de n, u_0 et v_0.
3. Étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 15. Suites adjacentes

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

1. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont deux suites adjacentes. Que peut-on en déduire ?
2. En déduire que (S_n) converge et donner un encadrement de la limite.
3. Plus généralement, si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent, (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 16. Suite implicite

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x^n + x - 1 = 0$ admet une unique solution x_n dans $]\,0, +\infty\,[$.
2. Calculer x_1 et x_2.
3. Montrer que la suite (x_n) est majorée par 1.
4. Étudier la monotonie de la suite (x_n).
5. Démontrer que (x_n) converge vers un réel ℓ tel que $1 \geqslant \ell \geqslant \dfrac{1}{2}$.
6. Montrer que $\ell = 1$. On pourra supposer par l'absurde que (x_n) converge vers $\ell \in]0, 1[$.

Exercice 17. Une étude classique

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 6x + 1}{9}$$

On définit la suite (u_n) en posant $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que l'équation $f(x) = x$ possède une solution unique α sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.
2. Montrer que $\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ 0 \leqslant u_n \leqslant \alpha$
3. Déterminer la monotonie de la suite (u_n).
4. Établir la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

Exercice 18. EM Lyon 2011 voie ECE

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = (x + \ln x)e^{x-1}$$

1. (a) Établir : $\quad \forall\, x \in]0, +\infty[, \quad \ln x + \dfrac{1}{x} > 0$
   (b) Construire le tableau de variation de f, limites comprises.
   (c) Tracer l'allure de C. On précisera la tangente au point d'abscisse 1.
2. On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geqslant 2$.
   (b) Établir, par récurrence : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant e^n$
   (c) Quelle est la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque l'entier n tend vers l'infini ?

Exercice 19. EM Lyon 1992 voie ECE

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < 0 \\ x \text{ si } x \geq 0 \end{cases}$$

On se propose d'étudier la suite réelle (u_n) définie par la donnée de son premier terme u_0 et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \int_0^1 f(t - u_n)\,dt$$

1. On suppose $0 \leq u_0 \leq 1$

   (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

   (b) Montrer que, si $0 \leq u_n \leq 1$, alors

   $$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + u_n^2\right).$$

   En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$u_n \leq 1.$$

   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente ; déterminer sa limite.

2. (a) On suppose $u_0 < 0$. Calculer u_1. En déduire l'étude de la suite (u_n).

   (b) On suppose $u_0 > 1$. Calculer u_1, puis u_n pour $n \in \mathbb{N}$. Que dire de la suite (u_n) ?

3. Interprétation graphique.

   On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$g(x) = x + \int_0^1 f(t - x)\,dt$$

   (a) Calculer pour tout nombre réel x la valeur de $g(x)$.

   (b) Tracer le graphe de g.

   (c) Représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n) dans les cas suivants :

   $$u_0 = -2;\ u_0 = 0;\ u_0 = 2.$$