TD n°7 : Polynômes

Exercice 1. Monôme de plus haut degré

Déterminer les degrés et coefficients dominants des polynômes suivants pour $n \geq 2$:

1. $(X+1)^{2n} - X^{2n-1}(X+2n)$
2. $(X+3)^n - (X+2)^n$
3. $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(2X-k)$
4. $(X+1)^n - (X-1)^n$

Exercice 2. Solutions polynomiales d'une équation différentielle

Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que

$$P(X) = \frac{1}{2} X\, P'(X).$$

Exercice 3. Résolution en utilisant le degré

Le but de l'exercice est de déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ solutions de l'équation :

$$P(X^2) = (X^2+1)\, P(X) \quad (\mathcal{E})$$

1. Quelques exemples :
   (a) Le polynôme $P(X) = X^3 + X + 1$ est-il solution ?
   (b) Le polynôme nul est-il solution ?
   (c) Montrer qu'aucun polynôme de degré 1 ne peut être solution.
2. Analyse du problème : soit P un polynôme non nul solution de l'équation $(\mathcal{E})$.
   (a) En posant $n = deg(P)$, déterminer la seule valeur de n possible.
   (b) En déduire alors tous les candidats.
3. Synthèse du problème : déterminer toutes les solutions.

Exercice 4. Division euclidienne

Effectuer les divisions euclidiennes suivantes dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^3 + 1$ par $X^2 + X + 1$.
2. $4X^4 + X^3 - 2X^2 - 5$ par $2X^2 + X + 1$.

Exercice 5. Reste de la division euclidienne

Soit $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de

1. X^n par $X^2 - 3X + 2$.
2. X^n par $(X-1)^2$.
3. $(X-1)^n + (X+1)^n - 1$ par $X^2 - 1$.

Exercice 6. Un problème à prendre à la racine

Sans développer, montrer que le polynôme $P(X) = (X-3)^2 - 2(X-2)^2 + (X-1)^2 - 2$ est le polynôme nul.

Exercice 7. Polynôme périodique

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$P(X+1) = P(X).$$

En posant $Q(X) = P(X) - P(0)$, montrer qu'alors P est un polynôme constant.

Exercice 8. Résolution d'équation

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$X^2\, P(X) = 0.$$

1. Montrer que P est le polynôme nul (on pourra penser à deux méthodes).
2. Ce résultat reste-t-il vrai dans les fonctions ?

Exercice 9. Racines multiples

1. Montrer que -1 est racine triple du polynôme
$$P(X) = X^5 + 2X^4 + 2X^3 + 4X^2 + 5X + 2.$$
En déduire sa factorisation dans $\mathbb{R}[X]$.
2. Préciser l'ordre de multiplicité de la racine 1 pour $P(X) = X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1$.

Exercice 10. Factorisations

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ les polynômes suivants
$$X^3 - 2X^2 - X + 2 \quad \text{et} \quad X^4 + 1.$$

Exercice 11. Relation coefficients-racines

Soit $P(X) = X^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$, et notons r_1 et r_2 ses deux racines (non nécessairement distinctes). Factoriser le polynôme P à l'aide des racines introduites, puis en développant l'expression obtenue, exprimer $r_1 + r_2$ et $r_1 \times r_2$ en fonction de b et c. Quel est l'intérêt de ces relations ?

Exercice 12. Suite de polynômes

Soit la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :
$$P_1(X) = 1 + X$$
et pour tout entier $n \geq 2$,
$$P_n(X) = 1 + \frac{X}{1!} + \frac{X(X+1)}{2!} + \cdots + \frac{X(X+1)\dots(X+n-1)}{n!}.$$

1. A l'aide de la définition, écrire les polynômes P_2 et P_3.
2. Déterminer la relation de récurrence entre P_{n+1} et P_n (pour $n \geq 1$).
3. Factoriser les polynômes P_2 et P_3.
4. Montrer alors que pour tout $n \geq 1$,
$$P_n(X) = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(X+k).$$

Exercice 13. Polynômes de Tchebychev

On considère la suite des polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$P_{n+2}(X) = 2X\,P_{n+1}(X) - P_n(X).$$

1. Préciser P_2, P_3, P_4.
2. Déterminer pour tout $n \geq 1$, le coefficient dominant de P_n ainsi que son degré. Qu'en est-il pour $n = 0$?
3. Etudier la parité des polynômes P_n.
4. (a) Exprimer $\cos(a)\cos(b)$ en fonction de $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$.
   (b) Montrer alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,
$$P_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$
5. En déduire les racines de P_n ainsi que sa forme factorisée.

Exercice 14. Polynômes d'interpolation de Lagrange

1. Un exemple : Déterminer l'unique polynôme P de degré 3 tel que
$$P(1) = 0, \quad P(2) = 0, \quad P(3) = 0 \text{ et } P(4) = 1.$$
2. Cas général : soit $n \in \mathbb{N}$, et $a_0, a_1, \dots, a_n$ $n+1$ réels 2 à 2 distincts.
   (a) Déterminer l'unique polynôme de degré n, noté L_0, tel que
$$L_0(a_0) = 1 \text{ et pour tout } k \in [\![1, n]\!], \quad L_0(a_k) = 0.$$
   (b) Plus généralement, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, déterminer l'unique polynôme de degré n, que l'on notera L_k, tel que $L_k(a_k) = 1$ et pour tout $j \in [\![0, n]\!]$, $j \neq k$, $L_k(a_j) = 0$.