TD n°9 : Limites et continuité

Exercice 1. Etude classique de fonctions

1. Etudier la fonction $g : x \mapsto 1-(x+1)e^{-2x}$. En déduire les variations de $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{1-e^{-2x}}$.
2. Faites l'étude complète de $f(x) = x+2-2\ln(e^x+1)$: parité, limites, asymptote en $+\infty$ et position relative, allure de la courbe.

Exercice 2. Comportement asymptotique

Déterminer le domaine de définition des fonctions f suivantes puis leur comportement asymptotique aux bornes de leur domaine de définition. En déduire l'allure de C_f au voisinage des infinis.

1. $f(x) = \ln(1+e^x+e^{2x})$: commencer par une étude à la main en $\pm\infty$, puis montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est aymptote à C_f en $+\infty$.
2. $f(x) = (x+\ln x)e^{1/x}$: pour l'étude en $+\infty$, déterminer la limite de $f(x)$, $f(x)/x$ puis $f(x)-x$ en $+\infty$.
3. $f(x) = x+\sqrt{x^2-1}$: pour l'étude en $+\infty$, commencer par une étude à la main, puis montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est asymptote à C_f en $+\infty$. Qu'en est-il en $-\infty$?

Exercice 3. Comportement asymptotique

Etudier le comportement en $+\infty$ (limite, asymptote éventuelle) des fonctions suivantes et tracer leur graphe au voisinage de $+\infty$:

a) $x \mapsto \dfrac{x^2}{x-2}$, b) $x \mapsto e^{-x}-x+1$, c) $x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x\sqrt{x-1}}$,

d) $x \mapsto x+\sqrt{x^2+x+1}$, e) $x \mapsto \dfrac{x^2}{\ln|x|}$, f) $x \mapsto \dfrac{x^3-8}{x^2-x+2}$,

g) $x \mapsto x\,e^{\frac{1}{x}}$, h) $x \mapsto \dfrac{x^2-3x+2}{x^5-1}$, i) $x \mapsto \dfrac{xe^x}{e^x+1}$,

j) $x \mapsto \dfrac{x^2-\ln(x)^2}{x-\ln(x)}$, k) $x \mapsto \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} x^k$.

Exercice 4. Limites

Etudier les limites des fonctions suivantes au point considéré :

a) $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ en 0 b) $\dfrac{\sqrt{1+x}-1-x}{x}$ en 0 c) $x+\sqrt{x^2-3x+2}$ en $\pm\infty$

d) $x|x|-x^2+x$ en $\pm\infty$ e) $\dfrac{x^2+2|x|}{x}$ en 0 et $-\infty$ f) $(1+x)^{1/x}$ en 0^+ g) $(1+x)^{\ln x}$ en 0^+

h) $\dfrac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/3}}$ en 0 et $+\infty$ i) $\dfrac{\left(1+\frac{x}{2}\right)\ln(1+x)}{x}$ en 0 j) $\dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$ en 0^+ k) $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$ en 0^+ et $+\infty$

l) $\dfrac{e^x-1}{\ln(1+x)}$ en 0 m) $\dfrac{\sqrt{x}}{e^x-1}$ en 0 et $+\infty$ n) $xe^{1/x}-x$ en $+\infty$ o) $\ln\left(\dfrac{e^x-1}{x}\right)$ en $+\infty$

p) $4x^2+\ln x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ en 0 q) $x^4e^{-\sqrt{x}}$ en $+\infty$ r) $\dfrac{\ln(1+e^x)}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$ s) $x^3-5x^2-e^x$ en $-\infty$

t) $\dfrac{e^x-e^3}{x-3}$ en 3 u) $\dfrac{\ln x}{x^2-1}$ en 1 v) $\dfrac{x^n-1}{x-1}$ en 1 w) $x\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)$ en $+\infty$

x) $\dfrac{\lfloor x\rfloor}{x}$ en 0 et $+\infty$ y) $\sin x\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en 0 z) $\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)e^{\cos x}$ en $+\infty$

Exercice 5. Etude de fonction

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{(1+x)^2}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f, que l'on notera $\mathcal{D}$.
2. Préciser le signe de f sur $\mathcal{D}$, ainsi que les limites aux bornes de $\mathcal{D}$.
3. Justifier la dérivabilité de f sur $\mathcal{D}$ et déterminer la fonction u telle que $\forall x \in \mathcal{D}$,

$$f'(x) = \frac{u(x)}{x(1+x)^3}.$$

4. Dresser le tableau de variations complet de u.
5. Montrer que la fonction u s'annule en un unique point sur $\mathcal{D}$, que l'on notera α.
6. Dresser le tableau de variations complet de f (en fonction de α).

Exercice 6. Etude de fonction

Soit φ la fonction définie par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{D}_\varphi$ de définition de φ.
2. Déterminer les limites de φ en -1 et 1. Interprétation graphique ?
3. (a) Rappeler la limite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{x}$ (*on pourra poser un* $X = ...$)
   (b) Récrire judicieusement φ pour en déduire que $\lim\limits_{x\to 0} \varphi(x) = -1$.
4. On introduit sur $]-1,1[$ la fonction h définie par $h(x) = (1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x)$.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_\varphi$, $\varphi'(x) = \dfrac{h(x)}{(1-x^2)(\ln(1-x))^2}$.
   (b) Calculer h' sur $]-1,1[$.
   (c) Résoudre sur $]-1,1[$ l'inéquation $\ln(1-x) < \ln(1+x)$. En déduire le signe de h'.
   (d) Dresser le tableau de variations de h. En déduire le signe de h.
   (e) Déterminer la limite de h à gauche en 1, en posant $X = 1-x$.
   (f) Donner le tableau de variations de φ.
5. Dessiner l'allure de φ.
6. Résoudre sur $\mathcal{D}_\varphi$ l'équation $\varphi(x) = -2$.

Exercice 7. Continuité en un point

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis y étudier la continuité :

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{x+\sqrt{x}}{x^2+\sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x} & \text{si } x \in [-1,1]\backslash\{0\} \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \qquad f_3(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{si } x \neq 0 \\ e & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{1-\sqrt{x}} & \text{si } x \in [0,+\infty[\backslash\{1\} \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases} \qquad f_5(x) = \begin{cases} \dfrac{x\ln x}{x-1} & \text{si } x \notin \{0,1\} \\ x & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$$

Exercice 8. Prolongement par continuité

Pour chaque fonction f, déterminer l'ensemble de définition, y étudier la continuité ainsi que les éventuels prolongements par continuité :

a) $f(x) = \dfrac{2-x}{\sqrt{x-2}}$ b) $f(x) = \sin(x)\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ c) $f(x) = x^x$

Exercice 9. Prolongement par continuité à gauche et à droite

On définit la fonction suivante :

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} x^x & \text{si} \quad x > 0 \\ \dfrac{xe^x}{1-e^x} & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Peut-elle être prolongée par continuité en 0 ?

Exercice 10. Prolongement par continuité

Les fonctions suivantes peuvent-elles être prolongées par continuité au point x_0 (on commencera par préciser leur ensemble de définition) :

1. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x+1}-1}$, en $x_0 = 0$
2. $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$, en $x_0 = 0$
3. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{2x-\pi}$, en $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 11. Continuité en un point

1. Soit la fonction f définie par $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \text{si } x \leq 1 \\ x^{\ln(\ln x)} & \text{si } x > 1 \end{array} \right.$.
   (a) Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$, puis préciser la valeur $f(1)$.
   (b) Montrer que f est continue au point 1.
2. Mêmes questions avec la fonction $f(x) = \left\{ \begin{array}{ll} (x-1)e^{\frac{1}{x-1}} & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{array} \right.$

Exercice 12. Partie entière

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor .$$

1. Exprimer $f(x)$ pour $x > 1$. En déduire la limite de f en $+\infty$. Et en $-\infty$?
2. (a) Encadrer $f(x)$ pour $x \in]0,1[$. En déduire que f admet une limite à droite en 0.
   (b) La fonction se prolonge-t-elle par continuité en 0 ?

Exercice 13. Fonction bornée

Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue, admettant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 14. Bijection réciproque

Soit f la fonction définie par $f(x) = x \ln x$.

1. Dresser le tableau de variations complet de f.
2. (a) Montrer qu'il existe une fonction g définie sur $I = \left[-\frac{1}{e}, +\infty \right[$ telle que :

$$\forall x \in I, \quad g(x) \ln(g(x)) = x.$$

   (b) Justifier que la fonction g est unique.
   (c) Dresser le tableau de variations complet de g, puis tracer sur un même graphique, les courbes de f et de g.

Exercice 15. Existence d'une solution unique

Montrer qu'il existe un unique $x > 0$ tel que

$$\ln(x) = \frac{1}{e^x}.$$

Vérifier alors que $x \in [1, 3]$.

Exercice 16. Théorème de la bijection monotone

Montrer que les fonctions suivantes définissent une bijection de I sur un intervalle à préciser.
Donner alors le tableau de variations de la réciproque puis déterminer la réciproque.

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x+x^2}}$, $I = \left[-\dfrac{1}{2}, +\infty \right[$ $\qquad$ $g(x) = \dfrac{2x^2+x+2}{x^2+1}$, $I = [1, +\infty[$ $\qquad$ $h(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$, $I = \mathbb{R}$.

Exercice 17. Fonction à paramètre

Soit $a > 0$. On définit la fonction f_a sur $[0, a]$ par

$$f_a(x) = \frac{a-x}{a(a+x)}.$$

1. Montrer que f_a réalise une bijection de $[0, a]$ sur un intervalle à préciser.
2. Dresser le tableau des variations de f_a^{-1}.
3. Montrer que

$$f_a^{-1} = f_{\frac{1}{a}}.$$