Corrigé du TD Variables aléatoires à densité

Exercice 1. Exemple d'une densité nulle en dehors d'un segment

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} at(2-t) & \text{si } t \in [0,2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Déterminer le réel a pour que la fonction f soit une densité de probabilité.
f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0,2\}$. De plus, f est positive sur $\mathbb{R}$ si $a \geq 0$. Comme f est nulle en dehors de $[0,2]$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^2 f(t)\,dt = a\int_0^2 t(2-t)\,dt = a\left[t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^2 = a\left(4 - \frac{8}{3}\right) = \frac{4a}{3}.$$

Ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{4a}{3} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{3}{4}.$$

On en conclut que f est une densité de probabilité si et seulement si $a = \frac{3}{4}$.

2. On note X une variable aléatoire de densité f.
Déterminer la fonction de répartition de X.
f est définie par morceaux, donc F_X également.
   — *Si $x < 0$, alors*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0.$$

   — *Si $x \in [0,2]$, alors*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt = 0 + \frac{3}{4}\int_0^x t(2-t)\,dt = \frac{3}{4}\left[t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^x = \frac{3x^2}{4}\left(1 - \frac{x}{3}\right).$$

   — *Si $x > 2$, alors*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)\,dt + \int_0^2 f(t)\,dt + \int_2^x f(t)\,dt = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Pour conclure, on a donc pour $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{3x^2}{4}\left(1 - \dfrac{x}{3}\right), & \text{si } x \in [0,2], \\ 1, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

3. Calculer $\mathbb{P}(X > 1/2)$.

$$\mathbb{P}(X > 1/2) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1/2) = 1 - F_X\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{3}{16}\left(1 - \frac{1}{6}\right) = 1 - \frac{5}{32} = \frac{27}{32}.$$

4. X a-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
$t \mapsto tf(t)$ est nulle en dehors de $[0,2]$ et est continue sur $[0,2]$, donc X admet une espérance. On a

$$E(X) = \int_0^2 tf(t)\,dt = \frac{3}{4}\int_0^2 t^2(2-t)\,dt = \frac{3}{4}\left[\frac{2t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right]_{t=0}^2 = \frac{3}{4}\left(\frac{16}{3} - 4\right) = 1.$$

5. X a-t-elle une variance ? Si oui, la calculer.
$t \mapsto t^2 f(t)$ est nulle en dehors de $[0,2]$ et est continue sur $[0,2]$, donc X admet un moment d'ordre 2, ainsi X admet une variance. On a

$$E(X^2) = \int_0^2 t^2 f(t)\,dt = \frac{3}{4}\int_0^2 t^3(2-t)\,dt = \frac{3}{4}\left[\frac{2t^4}{4} - \frac{t^5}{5}\right]_{t=0}^2 = \frac{3}{4}\left(8 - \frac{32}{5}\right) = \frac{6}{5}.$$

D'après la formule de Koenig-Huygens, on peut donc conclure

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{6}{5} - 1 = \frac{1}{5}.$$

Exercice 2. Loi de Pareto

Soit λ un réel strictement positif.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{t^{\lambda+1}} & \text{si } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. De plus, f est positive sur $\mathbb{R}$. Comme f est nulle en dehors de $[1, +\infty[$, on reconnait alors une intégrale de Riemann convergente car $\lambda + 1 > 1$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{1}^{+\infty} f(t)\,dt = \lambda \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{\lambda+1}}\,dt = \lambda \frac{1}{\lambda} = 1.$$
On en conclut que f est une densité de probabilité.

2. On note X une variable aléatoire de densité f.
Déterminer la fonction de répartition de X.
f est définie par morceaux, donc F_X également.
— *Si $x < 1$, alors*
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = 0.$$
— *Si $x \geq 1$, alors*
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{1} f(t)\,dt + \int_{1}^{x} f(t)\,dt = 0 + \lambda \int_{1}^{x} \frac{1}{t^{\lambda+1}}\,dt = \lambda \left[-\frac{1}{\lambda\, t^{\lambda}} \right]_{t=1}^{x} = 1 - \frac{1}{x^{\lambda}}.$$
Pour conclure, on a donc pour $x \in \mathbb{R}$
$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ 1 - \dfrac{1}{x^{\lambda}}, & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

3. X a-t-elle une espérance ? Si oui, la calculer.
$t \mapsto t f(t)$ est nulle en dehors de $[1, +\infty[$ et est continue sur $[1, +\infty[$. On a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t f(t)|\,dt = \lambda \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{\lambda}}\,dt.$$
D'après le critère de Riemann, cette intégrale converge si et seulement si $\lambda > 1$. Ainsi X admet une espérance si et seulement si $\lambda > 1$ et dans ce cas
$$E(X) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

4. X a-t-elle une variance ? Si oui, la calculer.
$t \mapsto t^2 f(t)$ est nulle en dehors de $[1, +\infty[$ et est continue sur $[1, +\infty[$. On a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = \lambda \int_{1}^{+\infty} \frac{1}{t^{\lambda-1}}\,dt.$$
D'après le critère de Riemann, cette intégrale converge si et seulement si $\lambda - 1 > 1$. Ainsi X admet un moment d'ordre 2 (et une variance) si et seulement si $\lambda > 2$ et dans ce cas
$$E(X^2) = \frac{\lambda}{\lambda - 2},$$
d'après la formule de Koenig-Huygens, on a alors
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{\lambda}{\lambda - 2} - \left(\frac{\lambda}{\lambda - 1} \right)^2 = \frac{\lambda \left((\lambda - 1)^2 - \lambda(\lambda - 2) \right)}{(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2} = \frac{\lambda}{(\lambda - 2)(\lambda - 1)^2}.$$

5. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$. Déterminer la loi de Y.
On détermine le support de Y. Comme $X(\Omega) = [1, +\infty[$, alors $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, alors
$$\mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(\lfloor X \rfloor = k) = \mathbb{P}(k \leq X < k+1) = F_X(k+1) - F_X(k) = \left(1 - \frac{1}{(k+1)^{\lambda}} \right) - \left(1 - \frac{1}{k^{\lambda}} \right) = \frac{1}{k^{\lambda}} - \frac{1}{(k+1)^{\lambda}}.$$

6. Pour quelles valeurs de λ la variable aléatoire Y admet-elle une espérance ?
Pour $k \in \mathbb{N}^*$,

$$k\mathbb{P}(Y = k) = k\left(\frac{1}{k^\lambda} - \frac{1}{(k+1)^\lambda}\right) = \frac{k}{(k+1)^\lambda}\left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^\lambda - 1\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{k}{k^\lambda}\frac{\lambda}{k} = \frac{\lambda}{k^\lambda}.$$

Or d'après le critère de Riemann (pour les séries) $\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k^\lambda}$ converge si et seulement si $\lambda > 1$. Ainsi

$$Y \text{ admet une espérance} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda > 1.$$

Exercice 3. Variable aléatoire à valeurs dans $[0, +\infty[$

Soit X une variable aléatoire à densité f, de fonction de répartition F.
On fait les hypothèses suivantes : f est nulle sur $]-\infty, 0[$, f est continue et strictement positive sur $]0, +\infty[$.

1. Montrer que : $\quad \forall x \in \mathbb{R},\ P(X > x) > 0$.
On a pour $x \in \mathbb{R}$,

$$P(X > x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt.$$

— *Si $x > 0$ alors comme f est strictement positive et continue sur $[x, +\infty[$, on a*

$$P(X > x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt > 0.$$

— *Si $x \leq 0$ alors*

$$P(X > x) = \int_x^{+\infty} f(t)\,dt = \int_x^0 f(t)\,dt + \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = 0 + 1 = 1 > 0.$$

2. Montrer que l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique m sur $]0, +\infty[$. (m est alors appelé médiane de X).
Comme f est nulle sur $]-\infty, 0[$, alors $F(0) = \int_{-\infty}^0 f(t)\,dt = 0$. De plus, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et si $x > 0$, on a

$$F'(x) = f(x) > 0.$$

F est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]0, 1[$. Comme $\frac{1}{2} \in]0, 1[$, alors d'après le théorème de la bijection monotone l'équation $F(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique m sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4. Loi uniforme : transfert

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$. Dans chacun des cas suivants, reconnaître la loi de Y et donner sans calcul l'espérance de Y.
   (a) $Y = 2X + 1$
   Soit $x \in \mathbb{R}$, on sait que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0, \\ x, & si\ x \in [0, 1], \\ 1, & si\ x > 1. \end{cases}$$

   Déterminons F_Y la fonction de répartition de Y. On remarque que $Y(\Omega) = [1, 3]$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(2X + 1 \leq x) = \mathbb{P}(2X \leq x - 1) \\ &= \mathbb{P}\left(X \leq \frac{x-1}{2}\right) = F_X\left(\frac{x-1}{2}\right) \\ &= \begin{cases} 0, & si\ \frac{x-1}{2} < 0, \\ \dfrac{x-1}{2}, & si\ \frac{x-1}{2} \in [0, 1], \\ 1, & si\ \frac{x-1}{2} > 1. \end{cases} \quad = \begin{cases} 0, & si\ x < 1, \\ \dfrac{x-1}{2}, & si\ x \in [1, 3], \\ 1, & si\ x > 3. \end{cases} \end{aligned}$$

   On reconnait la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[1, 3]$. La fonction de répartition caractérisant la loi, on a $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 3])$.
   On peut aussi utiliser la transformation affine de variables aléatoires uniformes en écrivant avec $a = 1 < b = 3$

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]) \quad \Longleftrightarrow \quad Y = (3 - 1)X + 1 \hookrightarrow \mathcal{U}([1, 3]).$$

   Donc $E(Y) = 2$.

(b) $Y=-2X+1$

Déterminons F_Y la fonction de répartition de Y. On remarque que $Y(\Omega)=[-1,1]$. Soit $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}(Y\leq x)=\mathbb{P}(-2X+1\leq x)=\mathbb{P}(-2X\leq x-1)\\ &= \mathbb{P}\left(X\geq \frac{1-x}{2}\right)=1-F_X\left(\frac{1-x}{2}\right)\\ &= \begin{cases} 1-0, \ si\ \frac{1-x}{2}<0,\\ 1-\dfrac{1-x}{2}, \ si\ \frac{1-x}{2}\in[0,1],\\ 1-1, \ si\ \frac{1-x}{2}>1.\end{cases} = \begin{cases} 1, \ si\ x>1,\\ \dfrac{x+1}{2}, \ si\ x\in[-1,1],\\ 0, \ si\ x<-1.\end{cases}\end{aligned}$$

On reconnait la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[-1,1]$. La fonction de répartition caractérisant la loi, on a $Y\hookrightarrow\mathcal{U}([-1,1])$ et $E(Y)=0$.

(c) $Y=-\ln X$

Déterminons F_Y la fonction de répartition de Y. On remarque que $Y(\Omega)=\mathbb{R}_+$. Soit $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}(Y\leq x)=\mathbb{P}(-\ln X\leq x)=\mathbb{P}(\ln X\geq -x)\\ &= \mathbb{P}\left(X\geq e^{-x}\right)=1-F_X\left(e^{-x}\right)\\ &= \begin{cases} 1-0, \ si\ e^{-x}<0,\\ 1-e^{-x}, \ si\ e^{-x}\in[0,1],\\ 1-1, \ si\ e^{-x}>1.\end{cases} = \begin{cases} 1-e^{-x}, \ si\ x\geq 0,\\ 0, \ si\ x<0.\end{cases}\end{aligned}$$

On reconnait la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre 1. La fonction de répartition caractérisant la loi, on a $Y\hookrightarrow\mathcal{E}(1)$ et $E(Y)=1$.

(d) $Y=|X-0{,}5|$

Déterminons F_Y la fonction de répartition de Y. On remarque que $Y(\Omega)=\left[0,\frac{1}{2}\right]$ donc si $x\leq 0$ alors $F_Y(x)=0$ et si $x\geq\frac{1}{2}$ alors $F_Y(x)=1$. Soit $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}(Y\leq x)=\mathbb{P}(|X-0{,}5|\leq x)=\mathbb{P}(-x\leq X-0{,}5\leq x)\\ &= \mathbb{P}\left(-x+0{,}5\leq X\leq x+0{,}5\right)=F_X\left(x+0{,}5\right)-F_X\left(-x+0{,}5\right)\\ &= (x+0{,}5)-(-x+0{,}5) \qquad \textit{en effet } x+0{,}5\in\left[\frac{1}{2},1\right] \textit{ et } -x+0{,}5\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ &= 2x\end{aligned}$$

Pour résumer

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0, \ si\ x<0,\\ 2x, \ si\ x\in\left[0,\frac{1}{2}\right],\\ 1, \ si\ x>\frac{1}{2}.\end{cases}$$

On reconnait la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $\left[0,\frac{1}{2}\right]$. La fonction de répartition caractérisant la loi, on a $Y\hookrightarrow\mathcal{U}\left(\left[0,\frac{1}{2}\right]\right)$ et $E(Y)=\frac{1}{4}$.

2. Soit $X\hookrightarrow\mathcal{U}(]-1,1[)$. On pose $Y=\ln\left(\frac{1+X}{1-X}\right)$.

(a) Expliciter la fonction de répartition de Y.

Déterminons F_Y la fonction de répartition de Y. On rappelle que pour $x\in\mathbb{R}$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, \ si\ x\leq -1,\\ \dfrac{x+1}{2}, \ si\ x\in]-1,1[,\\ 1, \ si\ x\geq 1.\end{cases}$$

Soit $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}(Y\leq x)=\mathbb{P}\left(\ln\left(\frac{1+X}{1-X}\right)\leq x\right)=\mathbb{P}\left(\frac{1+X}{1-X}\leq e^x\right)\\ &= \mathbb{P}\left(1+X\leq(1-X)e^x\right) \qquad \textit{car } (1-X)(\Omega)=]0,2[\\ &= \mathbb{P}\left(X\left(e^x+1\right)\leq e^x-1\right)\\ &= \mathbb{P}\left(X\leq\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)=F_X\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)\end{aligned}$$

On étudie la fonction $g : x \mapsto \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, *après étude (à faire), on remarque que g prend ses valeurs dans* $]-1,1[$.
Ainsi pour $x \in \mathbb{R}$

$$F_Y(x) = \frac{\frac{e^x-1}{e^x+1} + 1}{2} = \frac{e^x - 1 + (e^x + 1)}{2(e^x + 1)} = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

(b) En déduire que Y est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de Y.
F_Y *est continue et de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$, *donc* Y *est une variable aléatoire à densité. On a une densité* f_Y *de* Y *définie pour* $x \in \mathbb{R}$ *par*

$$f_Y(x) = \frac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

Exercice 5. Loi uniforme : partie entière

1. Donner la loi de $\lfloor X \rfloor$ lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{U}(]-10, 10[)$, puis lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left([0, \sqrt{2}]\right)$.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(]-10, 10[)$, *on rappelle que pour* $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) \quad = \quad \begin{cases} 0, \ \textit{si } x \leq -10, \\ \dfrac{x + 10}{20}, \ \textit{si } x \in]-10, 10[, \\ 1, \ \textit{si } x \geq 10. \end{cases}$$

On pose $Y = \lfloor X \rfloor$, *alors* $Y(\Omega) = [\![-10, 9]\!]$, Y *est donc une variable aléatoire finie. Soit* $k \in [\![-10, 9]\!]$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y = k) &= \mathbb{P}(k \leq X < k + 1) = F_X(k + 1) - F_X(k) \\ &= \frac{k + 1 + 10}{20} - \frac{k + 10}{20} = \frac{1}{20}. \end{aligned}$$

$Y = \lfloor X \rfloor$ *suit donc une loi uniforme sur* $[\![-10, 9]\!]$.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}\left([0, \sqrt{2}]\right)$, *on rappelle que pour* $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) \quad = \quad \begin{cases} 0, \ \textit{si } x < 0, \\ \dfrac{x}{\sqrt{2}}, \ \textit{si } x \in [0, \sqrt{2}], \\ 1, \ \textit{si } x > \sqrt{2}. \end{cases}$$

On pose $Z = \lfloor X \rfloor$, *alors* $Z(\Omega) = [\![0, 1]\!]$, Z *est donc une variable aléatoire finie. On a*

$$\mathbb{P}(Z = 0) = \mathbb{P}(0 \leq X < 1) = F_X(1) - F_X(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Donc $\mathbb{P}(Z = 1) = 1 - \mathbb{P}(Z = 0) = \dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$. *Ainsi* Z *suit une loi de Bernoulli de paramètre* $\dfrac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}$.

2. Soit $n \geqslant 2$ fixé. Déterminer la loi de $Z = X - \lfloor X \rfloor$ lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, n])$.
Si $X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, n])$, *on rappelle que pour* $x \in \mathbb{R}$

$$F_X(x) \quad = \quad \begin{cases} 0, \ \textit{si } x < 0, \\ \dfrac{x}{n}, \ \textit{si } x \in [0, n], \\ 1, \ \textit{si } x > n. \end{cases}$$

Comme pour $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$, *ceci est donc vrai pour* $x \in [0, n]$ *alors* $Z(\Omega) = [0, 1[$. *Pour* $x < 0$, *on a* $F_Z(x) = 0$ *et pour* $x \geq 1$, *on a* $F_Z(x) = 1$.

De plus, si $x \in [0, 1[$

$$F_Z(x) = \mathbb{P}\left(X - \lfloor X \rfloor \leq x\right) = \mathbb{P}\left(X \leq x + \lfloor X \rfloor\right)$$

or

$$\Big[X \leq x + \lfloor X \rfloor\Big] = \Big[\lfloor X \rfloor \leq X \leq x + \lfloor X \rfloor\Big] = \bigcup_{k=0}^{n-1} [k \leq X \leq x + k].$$

Cette union est disjointe, on obtient donc

$$F_Z(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}\left(k \leq X \leq x + k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} F_X(x + k) - F_X(k) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{x + k}{n} - \frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x}{n} = x.$$

Pour résumer, si $x \in \mathbb{R}$

$$F_Z(x) \quad = \quad \begin{cases} 0, & si\ x < 0, \\ x, & si\ x \in [0,1[, \\ 1, & si\ x \geq 1. \end{cases}$$

On reconnait la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0,1[$. La fonction de répartition caractérisant la loi, on a $Z \hookrightarrow \mathcal{U}([0,1[)$.

Exercice 6. Loi exponentielle : médiane

La variable X suit la loi exponentielle de paramètre λ, réel strictement positif.
Calculer la médiane de X. Comparer la médiane et l'espérance de X.

Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors sa fonction de répartition F est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0, & si\ x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & si\ x \geq 0. \end{cases}$$

La médiane est un réel m tel que $F(m) = \dfrac{1}{2}$. Comme F est nulle sur $]-\infty, 0[$, m est nécessairement positif.

$$F(m) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-\lambda m} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{-\lambda m} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -\lambda m = -\ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad m = \frac{\ln(2)}{\lambda}.$$

La médiane de X est égale à $\dfrac{\ln(2)}{\lambda}$ et son espérance est $\dfrac{1}{\lambda}$. La médiane est donc toujours inférieure à l'espérance dans le cas d'une loi exponentielle.

Exercice 7. Loi exponentielle : utilisation comme outil de calcul

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad f(x) = \begin{cases} xe^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire X.

   f est continue et positive sur $\mathbb{R}$, en effet f est continue en 0 car $xe^{-x} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-$, on a

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt.$$

   Ainsi si $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, on reconnait

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} te^{-t}\,dt = E(Y) = 1.$$

   On en conclut que f est une densité de probabilité.

2. Montrer que X admet une espérance et une variance que l'on déterminera avec le moins de calculs possibles.

   X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ converge absolument. Comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-$, on a

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt = \int_0^{+\infty} tf(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt.$$

   Ainsi si $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$, on reconnait

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t^2e^{-t}\,dt = E\left(Y^2\right).$$

   Or d'après la formule de Koenig-Huygens, $E\left(Y^2\right) = V(Y) + E(Y)^2 = 1 + 1 = 2$. Ainsi X admet une espérance et

   $$E(X) = 2.$$

   X admet un moment d'ordre 2 (et une variance) si et seulement si $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)\,dt$ converge. Comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-$, on a

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t^2f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} t^3e^{-t}\,dt.$$

Soit $A > 0$, on considère $\int_0^A t^3 e^{-t}\, dt$, *puis on intègre par parties avec*

$$u(t) = t^3 \quad \text{et} \quad u'(t) = 3t^2,$$
$$v'(t) = e^{-t} \quad \text{et} \quad v(t) = -e^{-t}.$$

u et v sont de classe C^1 sur $[0, A]$

$$\int_0^A t^3 e^{-t}\, dt = \left[-t^3 e^{-t}\right]_{t=0}^{A} + 3 \int_0^A t^2 e^{-t}\, dt.$$

En faisant tendre A vers $+\infty$, on obtient par croissance comparée

$$\int_0^{+\infty} t^3 e^{-t}\, dt = 3 \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t}\, dt = 3\, E(X) = 6.$$

Ainsi X admet un moment d'ordre 2 et donc une variance et $E\left(X^2\right) = 6$. D'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E\left(X\right)^2 = 6 - 2^2 = 2.$$

Exercice 8. Loi exponentielle et loi géométrique

La variable X suit la loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor$.

   On rappelle que

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

   $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, ainsi $\lfloor X \rfloor(\Omega) = \mathbb{N}$. $\lfloor X \rfloor$ est donc une variable aléatoire discrète, soit $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\lfloor X \rfloor = k\right) &= \mathbb{P}\left(k \leq X < k+1\right) = F_X(k+1) - F_X(k) \\ &= \left(1 - e^{-\lambda(k+1)}\right) - \left(1 - e^{-\lambda k}\right) \\ &= e^{-\lambda k}\left(1 - e^{-\lambda}\right) \\ &= \left(e^{-\lambda}\right)^k \left(1 - e^{-\lambda}\right) \end{aligned}$$

2. Déterminer la loi de $\lfloor X \rfloor + 1$. La reconnaître.
   En déduire l'espérance et la variance de $\lfloor X \rfloor$.

   D'après la question précédente, on a $\left(\lfloor X \rfloor + 1\right)(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Si $k \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\lfloor X \rfloor + 1 = k\right) &= \mathbb{P}\left(\lfloor X \rfloor = k-1)\right) \\ &= \left(e^{-\lambda}\right)^{k-1}\left(1 - e^{-\lambda}\right) \\ &= \left(1 - \left(1 - e^{-\lambda}\right)\right)^{k-1}\left(1 - e^{-\lambda}\right) \end{aligned}$$

   Ainsi $\lfloor X \rfloor + 1 \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ avec $p = 1 - e^{-\lambda}$. Et donc

$$E\left(\lfloor X \rfloor + 1\right) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} \quad \text{et} \quad V\left(\lfloor X \rfloor + 1\right) = \frac{1 - \left(1 - e^{-\lambda}\right)}{\left(1 - e^{-\lambda}\right)^2} = \frac{e^{-\lambda}}{\left(1 - e^{-\lambda}\right)^2},$$

   ainsi

$$E\left(\lfloor X \rfloor\right) = \frac{1}{1 - e^{-\lambda}} - 1 = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} \quad \text{et} \quad V\left(\lfloor X \rfloor\right) = \frac{e^{-\lambda}}{\left(1 - e^{-\lambda}\right)^2}.$$

3. Déterminer la fonction de répartition de $Z = X - \lfloor X \rfloor$.

   Comme pour $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$, alors $Z(\Omega) = [0, 1[$. Pour $x < 0$, on a $F_Z(x) = 0$ et pour $x \geq 1$, on a $F_Z(x) = 1$.

   De plus, si $x \in [0, 1[$

$$F_Z(x) = \mathbb{P}\left(X - \lfloor X \rfloor \leq x\right) = \mathbb{P}\left(X \leq x + \lfloor X \rfloor\right)$$

or comme $\lfloor X\rfloor(\Omega)=\mathbb{N}$

$$\Big[X\leq x+\lfloor X\rfloor\Big]=\Big[\lfloor X\rfloor\leq X\leq x+\lfloor X\rfloor\Big]=\bigcup_{k=0}^{+\infty}[k\leq X\leq x+k].$$

On a d'après le théorème de la limite monotone

$$F_Z(x)=\lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n}[k\leq X\leq x+k]\right)$$

or l'union est disjointe

$$\begin{aligned}
F_Z(x) &= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\left(k\leq X\leq x+k\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}F_X(x+k)-F_X(k)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\left(1-e^{-\lambda(x+k)}\right)-\left(1-e^{-\lambda k}\right)\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}e^{-\lambda k}\left(1-e^{-\lambda x}\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(1-e^{-\lambda x}\right)\sum_{k=0}^{n}\left(e^{-\lambda}\right)^k\\
&= \left(1-e^{-\lambda x}\right)\sum_{k=0}^{+\infty}\left(e^{-\lambda}\right)^k \qquad \textit{c'est une série géométrique convergente car } \left|e^{-\lambda}\right|<1,\\
&= \frac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}
\end{aligned}$$

Pour résumer, si $x\in\mathbb{R}$

$$F_Z(x)=\begin{cases}0, & \textit{si } x<0,\\ \dfrac{1-e^{-\lambda x}}{1-e^{-\lambda}}, & \textit{si } x\in[0,1[,\\ 1, & \textit{si } x\geq 1.\end{cases}$$

Exercice 9. Loi normale $\mathcal{N}(0,1)$: valeur absolue

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ et soit $Y=|X|$. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité, puis donner une densité de Y.

Comme $X(\Omega)=\mathbb{R}$, *alors* $Y(\Omega)=\mathbb{R}_+$. *Si* $x<0$, *alors* $F_Y(x)=0$ *et pour* $x\in\mathbb{R}_+$

$$\mathbb{P}\left(Y\leq x\right)=\mathbb{P}\left(-x\leq X\leq x\right)=\Phi(x)-\Phi(-x)=2\Phi(x)-1.$$

Ainsi pour $x\in\mathbb{R}$

$$F_Y(x)=\begin{cases}0, & \textit{si } x<0,\\ 2\Phi(x)-1, & \textit{si } x\geq 0.\end{cases}$$

F_Y *est continue et de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}^*$. *Comme* $2\Phi(0)-1=0$, F_Y *est bien continue en* 0. *Ainsi* Y *est bien une variable aléatoire à densité, dont une densité est* f_Y *(on pose ici* $f_Y(0)=2\varphi(0)$*)*

$$f_Y(x)=\begin{cases}0, & \textit{si } x<0,\\ 2\varphi(x), & \textit{si } x\geq 0.\end{cases}$$

Exercice 10. Loi normale $\mathcal{N}(0,1)$: manipulation de la fonction Φ

La variable X suit la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Soit n un entier naturel fixé, supérieur ou égal à 2.

Pour quelle valeur du réel positif a la probabilité $\mathbb{P}(a<X<na)$ est-elle maximale ?

On commencera par exprimer cette probabilité à l'aide de la fonction Φ*, fonction de répartition de* X.

Soit $a\geq 0$,

$$\mathbb{P}(a<X<na)=\Phi(na)-\Phi(a).$$

On pose la fonction f définie pour $a \geq 0$ par

$$f(a) = \Phi(na) - \Phi(a).$$

f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ en tant que composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$. Pour $a \geq 0$

$$f'(a) = n\,\varphi(na) - \varphi(a) = \frac{n}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(na)^2}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2}} \left(n e^{-\frac{a^2\left(n^2-1\right)}{2}} - 1 \right).$$

Ainsi comme $a \geq 0$ et $n \geq 2$,

$$f'(a) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad n e^{-\frac{a^2\left(n^2-1\right)}{2}} \geq 1 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{a^2\left(n^2-1\right)}{2} \geq -\ln(n) \quad \Leftrightarrow \quad a^2 \leq \frac{2\ln(n)}{n^2-1} \quad \Leftrightarrow \quad a \leq \sqrt{\frac{2\ln(n)}{n^2-1}}.$$

On note $a^* = \sqrt{\dfrac{2\ln(n)}{n^2-1}}$, on en conclut que f est croissante sur $[0, a^*]$ et décroissante sur $[a^*, +\infty[$. f atteint donc sa valeur maximale en $f\left(a^*\right)$.

Exercice 11. Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

T, température moyenne au mois de juillet à Strasbourg, suit la loi normale $\mathcal{N}(28, 25)$.

1. Préciser une densité, l'espérance et la variance de T.

   Ici $\mu = 28$ et $\sigma = 5$

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_T(x) = \varphi_{28,5}(x) = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-28)^2}{2\,5^2}} = \frac{1}{5\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-28)^2}{50}}.$$

   On a alors

   $$E(T) = 28 \quad \text{et} \quad V(T) = 25.$$

2. Calculer $\mathbb{P}(25 \leqslant T \leqslant 32)$ avec la précision permise par la table de la loi normale centrée réduite du cours.
   On calcule

   $$\mathbb{P}(25 \leqslant T \leqslant 32) = \mathbb{P}(-3 \leq T - 28 \leq 4) = \mathbb{P}\left(-\frac{3}{5} \leq \frac{T-28}{5} \leq \frac{4}{5}\right)$$

   Or $\dfrac{T-28}{5} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ ainsi

   $$\mathbb{P}(25 \leqslant T \leqslant 32) = \Phi\left(\frac{4}{5}\right) - \Phi\left(-\frac{3}{5}\right) = \Phi(0,8) - 1 + \Phi(0,6) \approx 0,7881 - 1 + 0,7257 \approx 0,5138.$$

3. De même avec $\mathbb{P}(T \leqslant 23)$.
   Puisque $\dfrac{T-28}{5} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, on a

   $$\mathbb{P}(T \leqslant 23) = \mathbb{P}(T - 28 \leqslant -5) = \mathbb{P}(T - 28 \leqslant -5) = \mathbb{P}\left(\frac{T-28}{5} \leq -1\right) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) \approx 1 - 0,8413 \approx 0,1587.$$

Exercice 12. Lois normales : utilisation comme outil de calcul

1. En utilisant une loi normale bien choisie, montrer que pour $a > 0$ et $m \in \mathbb{R}$

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x-m)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

   On considère $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \dfrac{1}{2a}\right)$, en effet dans ce cas $\mu = m$ et $\sigma = \dfrac{1}{\sqrt{2a}}$ et

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = \varphi_{m,\frac{1}{\sqrt{2a}}}(x) = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2a}}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2a}}\right)^2}\right) = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-a(x-m)^2\right).$$

   Comme f_X est une densité de probabilité, on a

   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{\pi}} e^{-a(x-m)^2}\,dx = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a(x-m)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

2. En déduire la valeur de $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\,\mathrm{d}x$ en fonction de a, b et c (avec $a > 0$).

Ecrivons I sous la forme de l'intégrale précédente, on sait que

$$ax^2+bx+c = a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)$$

Notons $\Delta = b^2-4ac$ (bonne idée !), ainsi

$$ax^2+bx+c = a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right).$$

Donc pour $x \in \mathbb{R}$

$$\exp\left(-(ax^2+bx+c)\right) = \exp\left(-a\left(\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right)\right) = \exp\left(-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\right)\exp\left(\frac{\Delta}{4a}\right).$$

Or d'après la question précédente avec $m = -\dfrac{b}{2a}$, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.$$

On en conclut que I converge et que

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(ax^2+bx+c)}\,\mathrm{d}x = e^{\frac{\Delta}{4a}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2-4ac}{4a}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{\frac{b^2}{4a}-c}.$$